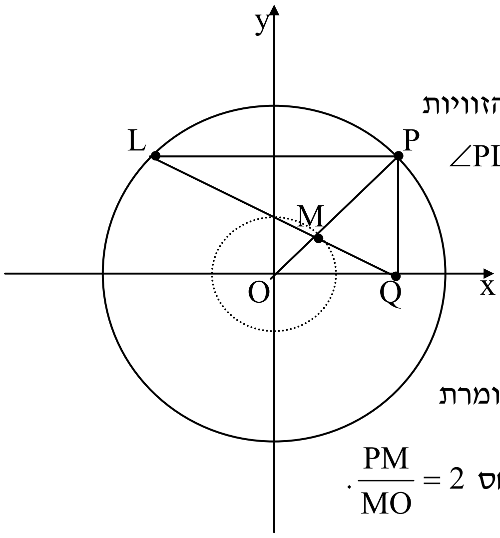
דוגמאות לפתרון התרגילים במקומות גיאומטריים 5 יחל י"ב

תרגיל 1

מהנקודה P על היקף המעגל $x^2+y^2=9$ מעבירים ישר המאונך לציר ה- x שחותך את הציר בנקודה Q , וישר מאונך לציר ה- y שחותך את המעגל בנקודה L. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הישר QL עם הישר OP (O ראשית הצירים)

פתרון

ראשית, נציין כי קיימות אפשרויות רבות לפתרון התרגיל. אנו מציעים כאן פתרון המבוסס על שימוש במשפטים שלמדנו בגיאומטריה של מישור.



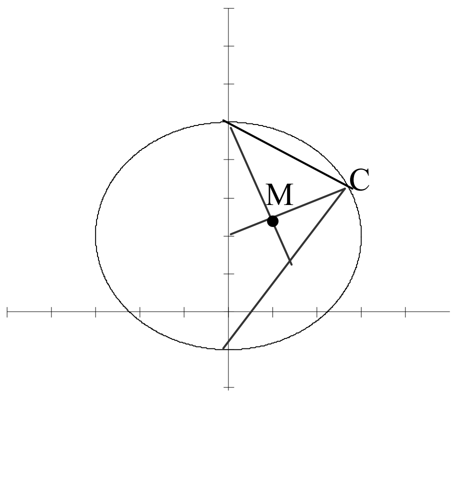
נסמן ב- $M(x_1,y_1)$ נקודה כללית על המקום הגיאומטרי המבוקש. מתקיים שוויון של הזוויות הבאות: $\angle MOQ=\angle MPL$ ו- גם $\angle PLM=\angle MQO$ (זוויות מתחלפות שוות בין ישרים מקבילים, ראה סרטוט). לכן $\Delta QMO \sim \Delta LMP$ לפי משפט דמיון (ז.ז.). כמו כן $PL=2|x_P|$ (ציר ה-y אנך ממרכז המעגל למיתר PL ולכן חוצה אותו), זאת אומרת יחס הדמיון הוא $2=\frac{|2x_P|}{|x_P|}=\frac{LP}{OQ}$. מכאן גם היחס $\frac{PM}{MO}=2$.

לפיכך, הנקודה M מחלקת את הקטע OP ביחס 1:2 ולכן שיעורי הנקודה P יהיו $P(3x_1,3y_1)$. נציב את שיעורי הנקודה P במשוואת המעגל ונקבל את המשוואה הבאה: $(3x_1)^2+(3y_1)^2=9$. לסיכום, המקום הגיאומטרי המבוקש מתואר על ידי המשוואה $x^2+y^2=1$ והוא מעגל (הקו המקווקו בסרטוט).

תרגיל 2

מצאו את המקום הגיאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים החסומים במעגל $x^2+(y-2)^2=9$, כך שצלע אחת של המשולש מתלכדת עם הקוטר של המעגל הנמצא על ציר ה- y.

פתרון



ממשוואת המעגל קל לראות כי מרכזו נמצא בנקודה (0,2) ורדיוסו 3. לכן ברור כי קדקודיו של המשולש הנמצאים על ציר ה-y הם בנקודות (0,5) ו- (0,-1). נסמן ב- $M(x_1,y_1)$ את הנקודה הכללית על מרכז הכובד.

כפי שלמדנו מרכז הכובד ניתן לביטוי על ידי שיעורי הקדקודים באופן הבא: $x_1 = \frac{0+0+x_C}{3}$ ו-

$y_1 = \frac{-1+5+y_C}{3}$. זאת אומרת $x_C = 3x_1$ ו- $y_C = 3y_1 - 4$. הנקודה C נמצאת על המעגל

הנתון ולכן שיעוריה מקיימים את משוואתו של המעגל: $(3x_1)^2 + (3y_1 - 4)^2 = 9$ ומכאן

משוואתו של המקום הגיאומטרי היא $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$. משוואה זו מתארת מעגל.

<u>תרגיל 3</u>

מצאו את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שהמרחק ביניהן לבין הנקודה (2,0) הוא מחצית מרחקיהן מהישר $x = 8$.

<u>פתרון</u>

נסמן ב- $M(x,y)$ את הנקודה הכללית על המקום הגיאומטרי הרצוי. המרחק בינה לבין הישר $x = 8$ הוא $|x-8|$ ולכן המשוואה שמתארת את המקום הגיאומטרי היא:

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{1}{2}|x-8|$. שני אגפים של המשוואה הם חיוביים ולכן העלאה בריבוע מביאה

אותנו למשוואה שקולה: $x^2 - 4x + 4 + y^2 = \frac{1}{4}(x^2 - 16x + 64)$ ולאחר כינוס איברים דומים

מקבלים אליפסה שמשוואתה היא $3x^2 + 4y^2 = 48$.

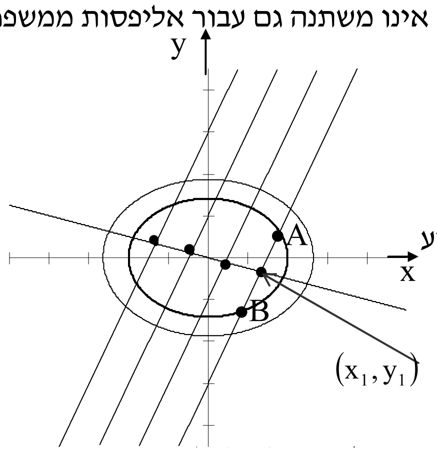
<u>הערה</u>: בתרגיל אנו רואים שאליפסה יכולה להתקבל כמקום גיאומטרי המוגדר באופן שונה ממה שלמדנו בפרק 6.

<u>תרגיל 4</u>

א. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי המיתרים באליפסה $x^2 + 2y^2 = 4$ שהשיפוע שלהם הוא 2.

ב. הסבר מדוע המקום הגיאומטרי שקיבלנו בסעיף א' אינו משתנה גם עבור אליפסות ממשפחה המוגדרת על ידי המשוואה: $x^2 + 2y^2 = a^2$.

<u>פתרון</u>



א. נסמן ב- $M(x_1, y_1)$ נקודה כללית על המקום הגיאומטרי. משוואת הישר העובר דרכה ובעל שיפוע 2 היא $y - y_1 = 2(x - x_1)$ או בצורה מפורשת $y = 2x + (y_1 - 2x_1)$. על מנת לקבוע את קצות המיתר המונח על ישר זה נציב את ה- y מהמשוואה המפורשת במשוואת האליפסה הנתונה. נקבל $x^2 + 2(2x + (y_1 - 2x_1))^2 = 4$.

לאחר סידור של המשוואה הריבועית מקבלים את המשוואה

$9x^2 + 8(y - 2x_1)x + 2(y - 2x_1)^2 - 4 = 0$. פתרונות משוואה זו נותנים את שיעורי ה-x של

הנקודות A ו-B שהן קצות המיתר במונחים של x_1 ו- y_1. אולם אין צורך לפתור את המשוואה.

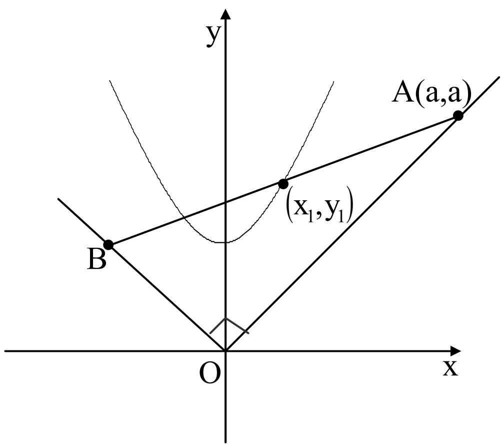
על פי משפט ויאטה: $x_A + x_B = -\frac{8(y_1 - 2x_1)}{9}$. מצד שני x_1 הוא ממוצע של שיעורי ה- x של קצוות המיתר ולכן $x_1 = -\frac{8(y_1 - 2x_1)}{2 \cdot 9}$ ומכאן $x_1 + 4y_1 = 0$. המקום הגיאומטרי המבוקש הוא קו ישר שמשוואתו $y = -0.25x$ (ראה סרטוט).

ב. על מנת להוכיח שהמקום הגיאומטרי נא ישתנה לכל משפחת האליפסות הנתונות נצטרך לעבור על פתרון חלק א' ולראות שכל השלבים אינם תלויים ב- 4 המופיע בחלק הימני של משוואת האליפסה. אם נחליף את 4 ב- a^2 ונחזור שוב על כל הדרך מהתחלה נקבל כמובן אותה משוואה.

<u>תרגיל 5</u>

נתון משולש ישר זווית OAB, שאחד מקדקודיו הוא O(0,0) והשניים האחרים A ו- B נמצאים על הישרים $y = x$ ו- $y = -x$ בהתאמה. ידוע כי הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B ברביע השני. מהו המקום הגיאומטרי של אמצעי היתר של המשולשים AOB אשר שטחם הוא 25 יחידות ריבועיות.

<u>פתרון</u>



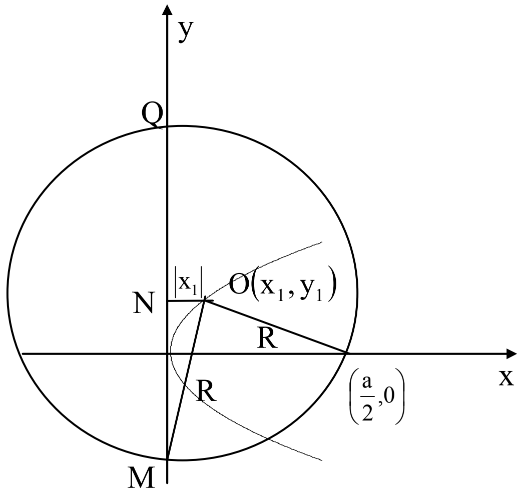
נסמן ב- (x_1, y_1) נקודה כללית על המקום הגיאומטרי וב- ב- (a,a) שיעורי הנקודה A.
על פי נוסחת אמצע קטע נקבל שהנקודה B היא $(2x_1 - a, 2y_1 - a)$ (בדקו זאת!). נתון כי הנקודה B נמצאת על הישר $y = -x$, זאת אומרת $-(2x_1 - a) = 2y_1 - a$ כלומר $x_1 + y_1 = a$.
כדי להשלים את הפתרון נשאר רק להביע את a באמצעות x_1 ו- y_1 מהנתון השני.

כעת נשתמש בנתון נוסף ששטח המשולש חייב להיות 25, כלומר $25 = \frac{OB \cdot OA}{2}$, או $OB \cdot OA = 50$. אורך הקטע OA הוא $a\sqrt{2}$ (ללא ערך מוחלט מכיוון שהנקודה A ברביע הראשון), ואורך הקטע OB שווה ל- $(a - 2x_1)\sqrt{2}$ מכיוון שהנקודה B ברביע השני. לכן $a\sqrt{2} \cdot (a - 2x_1)\sqrt{2} = 50$, כלומר $a^2 - 2x_1 a - 25 = 0$. כרגע נציב את $x_1 + y_1$ במקום a ולאחר כינוס איברים דומים נקבל את המקום הגיאומטרי הדרוש והוא $y_1{}^2 - x_1{}^2 = 25$.
בפרק 7 למדנו כי הצורה המתקבלת ממשוואה זאת היא היפרבולה שצירה הוא ציר ה- y.
על מנת לסיים את התרגיל נתייחס למיקום של הנקודות A ו- B, והתשובה הסופית היא הענף העליון של היפרבולה $y^2 - x^2 = 25$.

תרגיל 6

מהו המקום הגיאומטרי של מרכזי המעגלים העוברים בנקודה $\left(\frac{a}{2},0\right)$ ומקצים על ציר ה- y קטע

בעל אורך a.



פתרון

נסמן ב- $O(x_1,y_1)$ את מרכז המעגל המבוקש

וב- R את רדיוסו.האנך שיוצא ממרכז המעגל

לציר ה- y חוצה את הקטע MQ שהמעגל מקצה

על הציר (אנך למיתר שיוצא ממרכז המעגל).

אורך האנך ON הוא $|x_1|$. מהמשולש ONM

(ראב סרטוט) נקבל על פי משפט פתגורס :

$R^2 = x_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. מאידך, המרחק בין O

לבין הנקודה הנתונה $\left(\frac{a}{2},0\right)$ גם הוא רדיוס המעגל ולכן $R^2 = \left(x_1 - \frac{a}{2}\right)^2 + y_1^2$.

לא נשאר אלא להשוות את שני הביטויים של R^2 ולכנס איברים דומים. המקום הגיאומטרי

במתקבל בתנאים הללו הוא פרבולה שמשוואתה $y^2 = ax$.

בהצלחה בלימודים!!!

גנאדי