

פרק א': אלגברה – בעיות מילוליות, אינדוקציה ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מבין השאלות 2-1

- (1) הולך רגל ורוכב אופניים יצאו בשעה 9^{00} מנקודה A בכיוונים מנוגדים: הולך הרגל צעד לעבר נקודה C הנמצאת במרחק 36 ק"מ מ-A ואילו רוכב האופניים רכב לכיוון הנקודה B הנמצאת במרחק 24 ק"מ מ-A. מהירות רוכב האופניים גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של הולך הרגל. רוכב האופניים הגיע לנקודה B, חזר מייד על עקבותיו ורכב לעבר הנקודה C. הוא השיג את הולך הרגל שעה ו-12 דקות לפני שהולך הרגל הגיע לנקודה C.
- א. מצא את המהירות של הולך הרגל ושל רוכב האופניים.
 ב. באיזו שעה הגיע כל אחד מהם לנקודה C?

(2) a_n מסמן את האיבר במקום ה- n בסדרה החשבונית $3, 6, 9, \dots$.

הוכח באינדוקציה, כי 3^{a_n} משאיר שארית 1 בחילוק ב-26, לכל n טבעי.

ב. האם הביטוי $27^n + 77$ מתחלק ב-26 ללא שארית לכל n טבעי? נמק!

פרק ב': טריגונומטריה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 3-5 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)

(3) הבסיס של פירמידה ישרה הוא ריבוע שצלעו a . אורך הגובה לפאה צדדית הוא $1.3a$.

א. הבע באמצעות a את נפח הפירמידה.

ב. חשב את הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות.

(4) נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 34x + 48$ ו- $g(x) = x - 3$.

הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $h(x)$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $h(x)$ עם הצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן (עגל תוצאות לשתי ספרות אחרי הנקודה העשרונית).

ה. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$ וקבע את סוגן.

ו. סרטט באותה מערכת צירים את הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $h(x)$.

ז. חשב את השטח המוגבל על-ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל-ידי גרף הפונקציה $h(x)$ בתחום

$$-8 \leq x \leq 2.$$

(5) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{\cos x}{a}$ ו- $g(x) = -a \cos x$ ($a > 0$).

א. בטא באמצעות a את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ בתחום:

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

ב. מצא את הערך של a , עבורו השטח שמצאת בסעיף א' יהיה מינימלי.

ג. חשב את השטח המינימלי הכלוא בין הגרפים של הפונקציות בתחום הנתון.

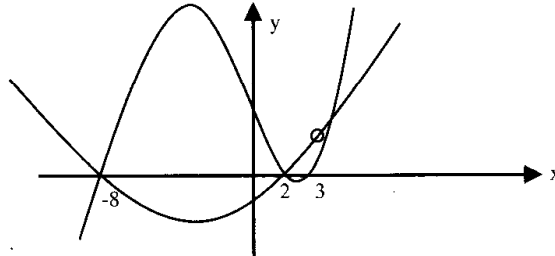
תשובות

- (1) א. 6 קמ"ש , 16 קמ"ש
ב. הולך הרגל הגיע בשעה 15^{00} , רוכב האופניים הגיע בשעה 14^{15}

(2) ב. כן

(3) א. $\frac{2a^3}{5}$ ב. 98.5°

- (4) א. $x \neq 3$ ב. $(0; -16), (-8; 0), (2; 0)$ ג. $(0; 48), (-8; 0), (2; 0), (3; 0)$
ד. $(-4.51; 170.63)$ מכסימום , $(2.51; -2.63)$ מינימום ה. $(-3; -25)$ מינימום



ז. $1166\frac{2}{3}$

(5) א. $\frac{2}{a} + 2a$ ב. $a = 1$ ג. 4

פרק א': אלגברה – בעיות מילוליות, אינדוקציה ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

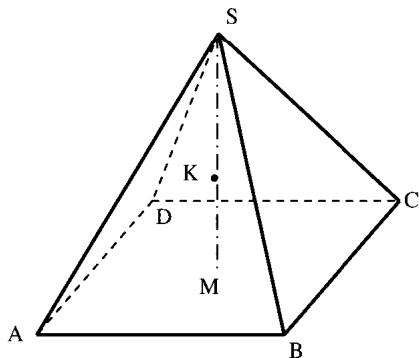
ענה על אחת מבין השאלות 2-1

- (1) שני הולכי רגל יצאו בו-זמנית משני מקומות A ו-B והלכו זה לקראת זה. הם נפגשו ואז התברר, שהולך הרגל שיצא מ-A עבר 62.5% מן המרחק בין A ל-B. שני הולכי הרגל המשיכו בדרכם. כעבור 54 דקות מרגע פגישתם, כשהגיע הולך הרגל שיצא מ-A לנקודה B, היה הולך הרגל השני במרחק של 9.6 ק"מ מן הנקודה A.
 א. מה המרחק בין A ל-B?
 ב. בכמה זמן עובר כל אחד מהולכי הרגל את המרחק בין A ל-B?

- (2) א. הוכח, כי לכל n טבעי זוגי, הביטוי: $a^n - b^n$ מתחלק ב- $a^2 - b^2$ ללא שארית (a, b טבעיים).
 ב. הוכח, על סמך סעיף א', כי $7^{26} - 2^{52}$ מתחלק ב- 33 ללא שארית.

פרק ב': טריגונומטריה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי ($66\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מבין השאלות 5-3 (לכל שאלה $33\frac{1}{3}$ נקודות)



- (3) נתונה פירמידה ישרה SABCD שבסיסה ריבוע. צלע הריבוע הוא a ס"מ וגובה הפירמידה SM ארוך פי 4 מצלע הריבוע. נקודה K היא אמצע הגובה SM.
 א. חשב את הזווית בין המישור KBC לבין הבסיס ABCD.
 ב. חשב את הזווית בין המישור KBC למישור הפאה SBC.
 ג. נתון כי מעטפת הפירמידה $9\sqrt{65}$ סמ"ר. מצא את צלע הריבוע.

(4) נתונה הפונקציה: $y = \frac{ax^2 + 7x + 6}{x^2 + b}$

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y הוא $-\frac{7}{36}$. הישר $y = 1$ הוא

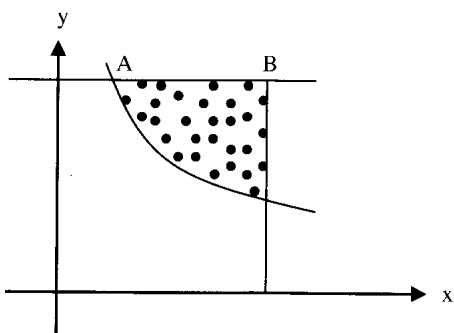
אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

א. מצא את a ואת b .

ב. חקור את הפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה (2) נקודות קיצון (3) תחומי עלייה וירידה (4) נקודות חיתוך עם הצירים (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר $y = k$ נקודות משותפות עם גרף הפונקציה.



5. נתונה הפונקציה $y = \frac{3}{\sqrt{ax-5}}$. דרך הנקודה $A(7,1)$, שעל גרף

הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- x . הישר $x - 20.5 = 0$ חותך את הישר המקביל דרך A בנקודה B .

א. מצא את a .

ב. מצא את השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישר AB והישר $x - 20.5 = 0$.

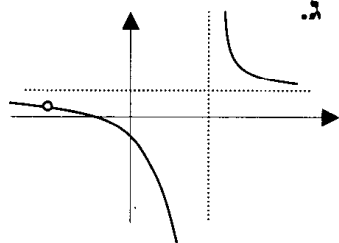
תשובות

(1) א. 24 ק"מ ב. הולך הרגל שיצא מ- A : 2.4 שעות, הולך הרגל שיצא מ- B : 4 שעות

(3) א. 75.96° ב. 6.91° ג. 3 ס"מ

(4) א. $a = 1, b = -36$ ב. (1) $x \neq \pm 6$ (2) אין (3) הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה

ג. (4) $(-1, 0), (0, -\frac{1}{6})$ (5) $x = 6, y = 1$



ד. $k = 1, k = \frac{5}{12}$

(5) א. 2 ב. 4.5