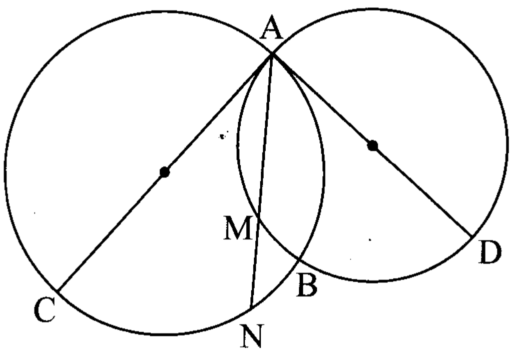
תרגילי הכנה למבחן מסכם במתמטיקה לכיתות 5 יח"ל וגם לכיתות 4-5 יח"ל

.1

שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו B , כך שהקטרים AC ו AD מאונכים זה לזה.
ישר, העובר דרך A , חותך את המעגל האחד ב M , ואת המעגל השני ב N (ראה ציור).
הוכח: $AM \cdot AN = CN \cdot DM$.

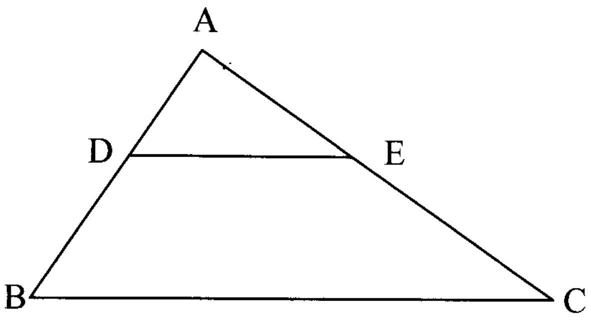


.2

נתון משולש ABC, ובו: $DE \parallel BC$

$S_{\Delta ADE} = \frac{1}{8} S_{\triangle DECB}$ (ראה ציור).

א. חשב את היחס $\frac{DE}{BC}$.



פתרון

סעיף א

צריך לחשב את היחס $\frac{DE}{BC}$.

מתוך הנתון $DE \parallel BC$ נובע:

$\angle ADE = \angle ABC$ (1) (מתאימות בין מקבילים)

$\angle AED = \angle ACB$ (2) (מתאימות בין מקבילים)

מתוך (1) ו (2): $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ (ז"ז)

$\frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)$ (3) (שטחים של משולשים דומים מתייחסים זה לזה כריבועי הצלעות המתאימות)

$S_{ABC} = S_{ADE} + S_{DECB} = S_{ADE} + 8 \cdot S_{ADE} = 9S_{ADE}$

נציב ב (3): $\frac{S_{ADE}}{9S_{ADE}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2$

$\frac{1}{9} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Rightarrow \boxed{\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}}$

סעיף ב

נתון: $MN \parallel BC$

צ"ל: $AM = MB$, $AN = NC$.

הוכחה: בסעיף א' הוכחנו כי $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

וכן שיחס הדמיון בין הצלעות המתאימות הינו 3:1 .

סעיף ב

נתון: $MN \parallel BC$

צ"ל: $AM = MB$, $AN = NC$.

הוכחה: בסעיף א' הוכחנו כי $\Delta ABC \sim \Delta ADE$

וכן שיחס הדמיון בין הצלעות המתאימות הינו 3:1 .

נובע מכך: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = \frac{3}{1}$ (1)

נעבור לטרפז DECB. $\Delta DEO \sim \Delta CBO$ (לפי ז"ז)

$\Downarrow$

$\frac{BC}{DE} = \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OD} = 3$ (2)

ב ΔDCB: $OM \parallel BC$ ולכן לפי משפט תאלס:

$\frac{CO}{OD} = \frac{BM}{MD}$ (3)

לפי (3) ו (2): $\frac{BM}{MD} = 3$ (4)

לפי (1), אם נסמן $AD = t$ יהיה $BD = 2t$

לפי (4), אם נסמן $MD = \ell$ יהיה $BM = 3\ell$.

$BD = BM + MD = 3\ell + \ell = 4\ell$

קיבלנו כי: $BD = 4\ell = 2t$, כלומר: $2\ell = t$

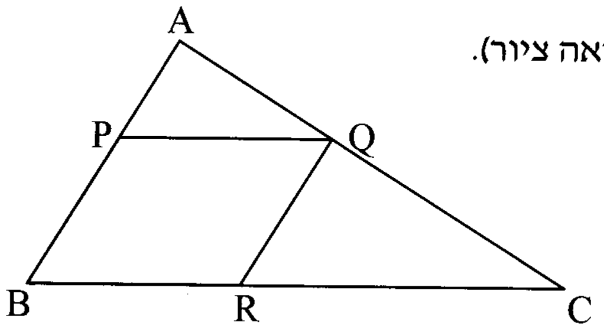
$AM = AD + MD = t + \ell = 2\ell + \ell = 3\ell$

$MB = BD - MD = 2t - \ell = 4\ell - \ell = 3\ell$

מכאן: $\boxed{AM = MB}$ מש"ל.

באותה דרך ניתן להוכיח כי: $\boxed{AN = NC}$.

.3

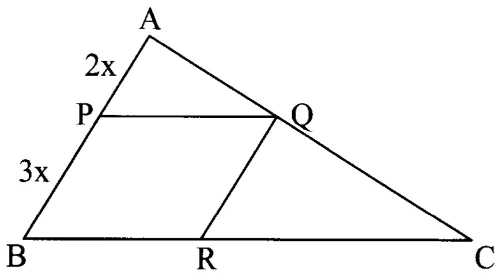


נתון משולש ABC החוסם מעוין PQRB (ראה ציור).

נקודה p מחלקת את הצלע AB ביחס של

$AP : PB = 2 : 3$.

מצא את היחס בין הצלע AB לצלע BC.



פתרון

נתון כי: $\frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$

נוכיח דמיון בין משולש ΔAPQ

למשולש ΔABC:

$\sphericalangle BAC = \sphericalangle PAQ$ (זווית משותפת)

$\sphericalangle ABC = \sphericalangle APQ$ (במעוין הצלעות הנגדיות מקבילות, ולכן אלו זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים)

$\Downarrow$

$\Delta APQ \sim \Delta ABC$

$\Downarrow$

$$\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ}{AC}$$

נתבונן על שני הזוגות הראשונים: $\frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC}$

נחלק ב PQ ונכפול ב AB ונקבל: $\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PQ}$

במעוין כל הצלעות שוות, ולכן $PQ = PB$:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AP}{PB} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}}$$

הערה: ניתן לפתור בצורה דומה ע"י מציאת דמיון בין משולשים אחרים כמו משולש ΔRCQ ומשולש ΔAPQ, ולקבל אותה תשובה.

.4

נתון משולש ישר זוית ושווה שוקיים ABC ($\sphericalangle C = 90°$) .

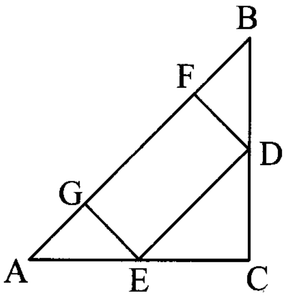
D היא אמצע BC ו E היא אמצע AC.

מנקודה D מורידים אנך ליתר AB, החותך אותו בנקודה F,

ומנקודה E מורידים אנך ליתר AB, החותך אותו בנקודה G (ראה ציור).

נתון כי שטח משולש CDE הוא 18 סמ"ר.

חשב את היקף המרובע GEDF.



פתרון

נתון: $S_{CED} =$ 18 סמ"ר

$\Downarrow$

$$\frac{EC \cdot CD}{2} = 18$$

$\Downarrow$

$EC \cdot CD = 36$

$EC = CD$ ולכן: $EC = CD =$ 6 ס"מ

משפט פיתגורס במשולש CED:

$ED^2 = CE^2 + CD^2$

$ED^2 = 6^2 + 6^2$

$ED = \sqrt{72}$

משפט פיתגורס במשולש AGE:

$AE^2 = AG^2 + GE^2$

ידוע: $AG = GE$
(משולש ישר זוית ושווה שוקיים)

$AE = CE = 6$ ס"מ

$6^2 = GE^2 + GE^2$

$36 = 2GE^2$

$GE^2 = 18$

$GE = \sqrt{18}$

$\Downarrow$

$P_{DEGF} = 2\sqrt{18} + 2\sqrt{72}$

$P_{DEGF} = 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2} = \boxed{18\sqrt{2}}$

שלב א' - נוכיח שמרובע DEGF הוא מלבן.

נתון: $\sphericalangle DFG = \sphericalangle EGF = 90°$

משולש ABC שווה שוקיים וישר זוית ולכן

$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABC = 45°$

$\Downarrow$

$\sphericalangle AEG = \sphericalangle BDF = 45°$
(משלימות $180°$ במשולש)

משולש CDE גם כן שווה שוקיים וישר

זוית (כי $EC = \frac{1}{2}AC$ וגם

$CD = \frac{1}{2}BC \Rightarrow EC = CD$)

ולכן:

$\sphericalangle DEC = \sphericalangle EDC = 45°$

$\Downarrow$

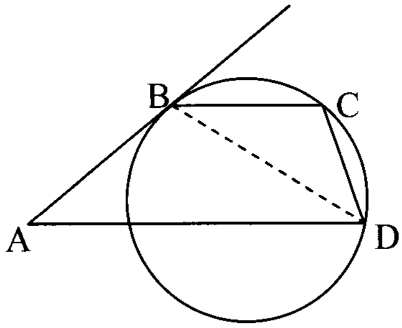
$\sphericalangle GED = \sphericalangle EDF = 90°$

מרובע שכל זוויותיו שוות ל-

$90°$ הוא מלבן ולכן DEGF מלבן.

שלב ב' – נחשב את צלעות המלבן DEGF:

5.



ABCD הוא טרפז $(BC \parallel AD)$.

הצלעות BC ו CD הן מיתרים במעגל.

הצלע AB משיקה למעגל זה בנקודה B

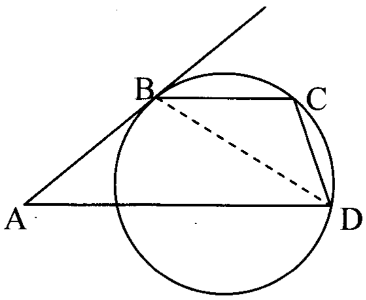
(ראה ציור).

א. הוכח כי: $\Delta ABD \sim \Delta DCB$

ב. נתון: $BC =$ 5 ס"מ, $AD =$ 12.8 ס"מ.

חשב את אורך האלכסון BD.

פתרון



סעיף א

הוכחת דמיון:

$\measuredangle DBC = \measuredangle ADB$ (זוויות מתחלפות)

$\measuredangle DCB = \measuredangle ABD$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית שנשענת על אותו מיתר מצידו השני)

$$\Downarrow$$

$\Delta ABD \sim \Delta DCB$ (ז.ז)

סעיף ב

$AD =$ 12.8 ס"מ

$BC =$ 5 ס"מ

יחס הדמיון במשולשים של סעיף א' הוא:

$$\frac{BD}{AD} = \frac{BC}{AD} = \frac{DC}{AB}$$

נשתמש בשני החלקים הראשונים, ונציב את הנתונים:

$$\frac{BD}{12.8} = \frac{5}{BD}$$

$$BD^2 = 64$$

$\boxed{BD = \text{8 ס"מ}}$