

ה ש א ל ו ת

פרק ראשון – גיאומטריה אנליטית, וקטורים (66 $\frac{2}{3}$ נקודות)

ענה על שתיים מהשאלות 1 – 3 (לכל שאלה - $33\frac{1}{3}$ נקודות).

שים לב! אם תענה על יותר משתי שאלות, ייבדקו רק שתי התשובות הראשונות שבמחברתך.

1. א. במשולש ABC משוואות הצלעות AB ו- AC הן בהתאמה $3x + 4y = 9$ ו- $4x - 3y + 16 = 0$. הצלע השלישית BC עוברת בנקודה $D(5, 2)$ כך ש- $BD : DC = 4 : 5$. מצא את משוואת הצלע BC .
- ב. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות O עבורן $\angle BOC = 45^\circ$ אם ידוע שהנקודה O נמצאת משמאל לישר BC .

2. הנקודה $P(x_1, y_1)$ נמצאת על ההיפרבולה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

- א. מצא את משוואות האסימפטוטות של ההיפרבולה.
- ב. נסמן ב- α את הזווית החדה בין שתי האסימפטוטות של ההיפרבולה. הוכח כי: $\tan \alpha = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$.
- ג. מהנקודה $P(x_1, y_1)$ מורידים שני אנכים לשתי האסימפטוטות של ההיפרבולה החותכים אותן בנקודות M ו- N בהתאמה.
- (1) הוכח כי $MP \cdot NP = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$.
- (2) הוכח כי שטח המשולש $S_{\Delta PMN} = \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)^2}$.

3. המישורים $\pi_2 : -2x + 2y + z = 4$, $\pi_1 : \underline{x} = (1, 1, 4) + t(1, -1, 0) + s(1, 0, 2)$

ו- $\pi_3 : -x + y = -2$ עוברים דרך פאותיו של מקבילון $ABCD A' B' C' D'$.

אחד מקדקודי המקבילון נמצא בנקודה $(2, 2, 0)$.

א. הראה שהנקודה $(2, 2, 0)$ לא נמצאת על אף אחד מהמישורים הנ"ל.

ב. רשום את משוואות המישורים העוברים דרך שאר הפאות.

ג. חשב את נפח המקבילון $ABCD A' B' C' D'$.

פרק שני – מספרים מרוכבים,

פונקציות מעריכיות ולוגריתמיות (33 $\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מהשאלות 4 – 5.

שים לב! אם תענה על יותר משאלה אחת, תיבדק רק התשובה הראשונה שבמחברתך.

4. א. (1) פתור את המשוואה: $z^4 - 1 = 0$.
- (2) היעזר בפתרונות המשוואה בסעיף (1) ע"מ לפתור את המשוואה $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.
- ב. במישור גאוס, הנקודות A , B ו- C מתארות את המספרים המרוכבים $\alpha = -2$, $\beta = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$ ו- $\gamma = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$ בהתאמה.
- (1) הצג את הנקודות A , B ו- C במערכת צירים מתאימה (לשם נוחיות התייחס לכל 5 משבצות כיחידה אחת).
- (2) הוכח כי, הנקודות A , B , C ו- O (ראשית הצירים) נמצאות על מעגל אחד.
- (3) מצא את מרכזו ורדיוסו של מעגל זה.
- ג. (1) למערכת הצירים שבנית בסעיף ב' הוסף את הנקודה D המתאימה למספר $\lambda = -\frac{1}{2}$.
- (2) מצא הצגה קוטבית (טריגונומטרית) למספר $z' = \frac{\alpha - \gamma}{\lambda - \gamma}$.
- (3) חשב את היחס $\frac{CA}{CD}$.
- (4) חשב את הזווית $\angle CDA$.
5. נתונה הפונקציה $f(x) = \sqrt{2x-1} \cdot e^{x^2-x}$.
- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. הוכח כי הפונקציה עולה לכל x .
- ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$.
- ה. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל על ידי סיבוב השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי המשיק סביב ציר ה- x .

תשובות סופיות

1. א. $x = 5$

ב. $(x + \frac{7}{4})^2 + (y - \frac{21}{4})^2 = \frac{729}{8}$

2. א. $y = \pm \frac{b}{a}x$

ב. הוכחה.

ג. (1) הוכחה.

(2) הוכחה.

3. א. הוכחה.

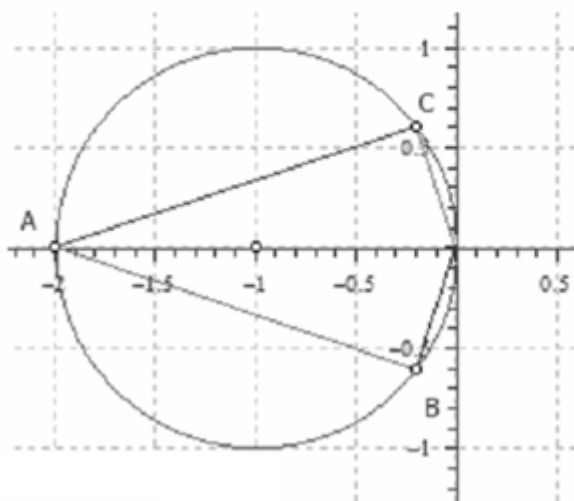
ב. $-x + y = 0$, $2x - 2y - z = 0$, $2x + 2y - z = 8$

ג. 16

4. א. (1) $z = \pm i$, ± 1

(2) $z = -2$, $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$, 0 , $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$

ב. (1)



(2) הוכחה.

(3) $R = 1$, $M(-1, 0)$

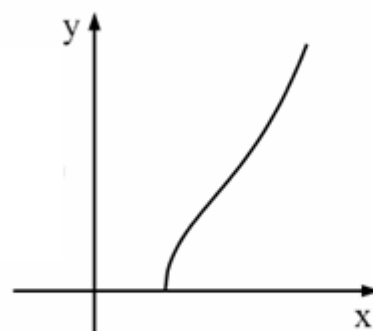
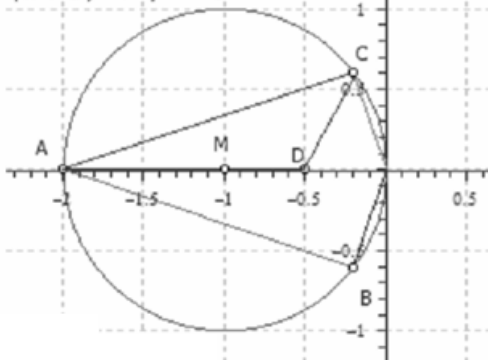
ג. (1)

5. א. $x \geq \frac{1}{2}$

ב. הוכחה.

ג.

$(x + 1)^2 + y^2 = 1$



(2) $z' = 2\sqrt{2}cis315^\circ$

(3) $2\sqrt{2}$

(4) $\angle 116.565^\circ$

ד. $y = 2x - 1$

ה. $\frac{\pi(2\sqrt{e}-3)}{6\sqrt{e}} \approx 0.095$