מעגל- הנדסת המישור

קובץ תרגילים עם מעגל לתלמידי 4 ו-5 יח"ל

עפ"י הנחיות הפיקוח על המתמטיקה צריך ללמד בכיתה י' על דמיון משולשים ובכיתה י"א צריך ללמד על המעגל. בהתאם להנחיות אלה נכתב הספר מתמטיקה (4 ו-5 יחידות לימוד) חלק א' שאלונים 035804 ו-035806 (כתום אדום).
בספרי ההמשך של ספר זה יופיע המעגל בצורה מפורטת.
בתי ספר שרוצים בכל זאת ללמד על המעגל לפני דמיון משולשים יכולים להיעזר בקובץ תרגילים זה.
התרגילים הם מתוך הספר מתמטיקה (4 ו-5 יחידות לימוד) חלק ה' שאלון 035005 (כחול ירוק).

<u>פירוט התרגילים:</u>

בע"מ 124-148 כל התרגילים הם עם מעגל.
בע"מ 149-153 התרגילים שכוללים מעגל הם התרגילים הבאים: 7, 18, 19, 20.
בע"מ 154-160 התרגילים שכוללים מעגל הם התרגילים הבאים: 11-26, 30, 32, 33.
בע"מ 161-163 כל התרגילים הם עם מעגל.

<u>הערה:</u> כל התרגילים שמופיעים בקובץ זה יופיעו בספרי ההמשך לשאלונים 804 ו- 806.

התרגילים מופיעים בהמשך לעמוד זה.

פרק רביעי

הנדסת המישור — מעגל

הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

פרק זה כולל תרגילים על מעגל. הסעיף הראשון כולל תרגילים עם **הגדרת המעגל** וכן תרגילים על **מיתרים**, **קשתות** והמרחקים של מיתרים ממרכז המעגל. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 193–224.

הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

סיכום המושגים העיקריים

מעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה.
הנקודה הקבועה נקראת **מרכז המעגל**. המרחק הקבוע נקרא **רדיוס** וכך נקרא גם כל קטע המחבר את המרכז עם נקודה על המעגל. קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל נקרא **מיתר**. מיתר העובר דרך המרכז נקרא **קוטר**. חלק מהמעגל שבין שתי נקודות נקרא **קשת**.
זווית מרכזית – זווית שהקודקוד שלה במרכז המעגל.
משפט – על מיתרים שווים נשענות זויות מרכזיות שוות ולהיפך.
משפט – זויות מרכזיות שוות נשענות על קשתות שוות ולהיפך.
משפט – למיתרים שווים מתאימות קשתות שוות ולהיפך.
משפט – לזוית המרכזית הגדולה מתאימה הקשת הגדולה ומתאים המיתר הגדול ולהיפך.
מרחק מיתר מהמרכז – אורכו של הקטע המחבר את מרכז המעגל עם המיתר ומאונך לו.
משפט – אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל – חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר ולהיפך.

משפט – מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים מהמרכז ולהיפך.
משפט – אם במעגל מיתר אחד יותר גדול ממיתר שני אז מרחקו מהמרכז של המיתר הגדול יותר קטן ממרחקו מהמרכז של המיתר הקטן ולהיפך.

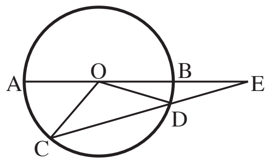
תרגילים
(הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות)

הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

1) במעגל שמרכזו O, AB הוא קוטר ו-CD הוא מיתר שהמשכיהם נחתכים בנקודה E.
נתון שהקטע DE שווה לרדיוס המעגל.

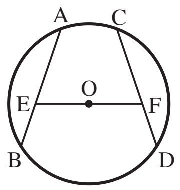
א. נתון: $\measuredangle BOD = 18^o$. חשב את זווית AOC.

ב. (ללא קשר לנתון של סעיף **א'**).
הוכח: $\measuredangle AOC = 3\measuredangle BOD$.



2) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O. הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על המיתרים AB ו-CD כך שהקטע EF עובר דרך המרכז O
ומתקיים: $EO = FO$, $BE = DF$.

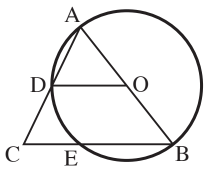
הוכח: $AB = CD$.



3) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. המיתר BE מקביל לרדיוס DO. המשך המיתר AD נפגש עם המשך המיתר BE בנקודה C.

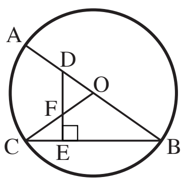
א. הוכח: $AD = CD$. **(רמז:** קטע אמצעים).

ב. הוכח: $AB = CB$. **(הדרכה:** היעזר בחישוב זויות).

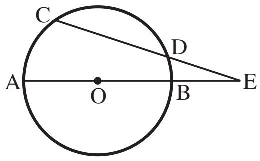


4) AB הוא קוטר ו-BC הוא מיתר במעגל שמרכזו O. DE הוא אנך למיתר BC והוא חותך את CO בנקודה F.

הוכח: המשולש DOF הוא שווה שוקיים.



5) במעגל שמרכזו O נתון: AB הוא קוטר ו-CD הוא מיתר שהמשכיהם נחתכים בנקודה E.

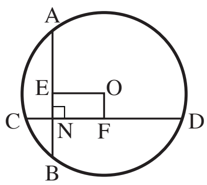


א. הוכח: $CE < AE$. (**הדרכה:** חבר את O עם C והתבונן במשולש COE).

ב. הוכח: $BE < DE$.

מיתרים ומרחקיהם מהמרכז

6) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O המאונכים זה לזה שנחתכים בנקודה N.
הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי המיתרים AB ו-CD.



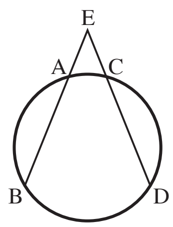
א. הסבר מדוע המרובע $EOFN$ הוא מלבן.

ב. נתון: $CN = 2$ ס"מ, $OE = 5$ ס"מ. חשב את CD ו-ND.

ג. נתון: $BN = 3$ ס"מ, $AE = 5.5$ ס"מ. חשב את OF ו-AN.

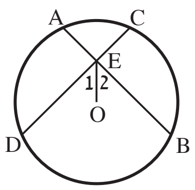
ד. מהו מרחק המיתר AB מהמרכז ומהו מרחק המיתר CD מהמרכז?
(אין צורך לבצע חישובים נוספים).

7) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל השווים זה לזה שהמשכיהם נפגשים בנקודה E.



הוכח: $BE = DE$.

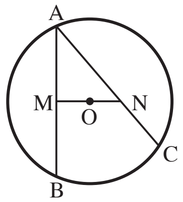
8) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O הנחתכים בנקודה E.



נתון: $\sphericalangle E_1 = \sphericalangle E_2$.

הוכח: $AB = CD$.

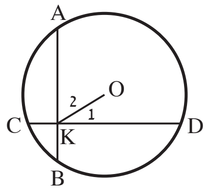
9) AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. הנקודה M היא אמצע המיתר AB. המשך הקטע MO חותך את המיתר AC בנקודה N.



נתון: $MO = NO$.

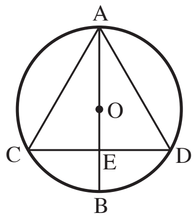
הוכח: $AC > AB$.

(10 AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O הנחתכים בנקודה K.
נתון: $AB \perp CD$, $\sphericalangle K_1 < \sphericalangle K_2$.
הוכח: $AB < CD$.

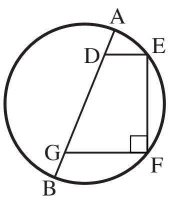


בעיות שונות — הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

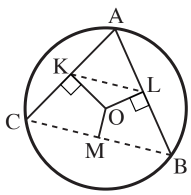
(11 AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O והוא **חוצה** את המיתר CD בנקודה E. נתון: $OE = BE$.
א. הוכח: המשולש ACD הוא שווה צלעות.
ב. הוכח: המרובע שקודקודיו הם O, D, B ו-C הוא מעוין.
ג. חשב את זויותיו של המעוין.



(12 AB הוא קוטר במעגל. DEFG הוא טרפז ישר זוית שבו $DE \parallel GF$ ו-$\sphericalangle F = 90^o$. (הנקודות D ו-G נמצאות על הקוטר והנקודות E ו-F נמצאות על המעגל).
א. הוכח: $AD = BG$.
(הדרכה: העבר אנך מאמצע EF).
ב. הוכח: $DE + GF < AB$.



(13 AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. מהמרכז הורידו אנכים OL ו-OK למיתרים.
א. הוכח: $KL \parallel CB$, $KL = \frac{1}{2} CB$.
(רמז: קטע אמצעים).
ב. נתון: $ML \parallel AC$. הוכח: $OM \perp CB$.



הוכחת משפטים — הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות

(14 הוכח את המשפט:
על מיתרים שווים נשענות זויות מרכזיות שוות ולהיפך.
(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 201).

(15 הוכח את המשפט:
אנך ממרכז המעגל למיתר במעגל — חוצה את המיתר, חוצה את הזוית המרכזית הנשענת על המיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.
(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 207).

16) הוכח את המשפט:

מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל ולהיפך.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 211 ו-212).

17) הוכח את המשפט:

אם במעגל מיתר אחד יותר גדול ממיתר שני אז מרחקו מהמרכז של המיתר הגדול יותר קטן ממרחקו מהמרכז של המיתר הקטן.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 213).

תשובות (הגדרת המעגל, מיתרים וקשתות):

1) א. 54^{o}. **6)** ב. 14 ס״מ, 12 ס״מ. ג. 2.5 ס״מ, 8 ס״מ. ד. 5 ס״מ, 2.5 ס״מ.

11) ג. 60^{o}, 120^{o}, 60^{o}, 120^{o}.

זויות במעגל

סעיף זה כולל תרגילים על **זויות היקפיות ומרכזיות במעגל**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 256–224.

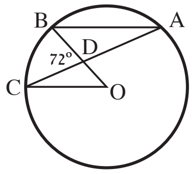
זויות במעגל
סיכום המושגים העיקריים

זוית היקפית – זוית שהקודקוד שלה על המעגל ושוקיה חותכות את המעגל.
משפט עיקרי – זוית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית היקפית הנשענת על אותה קשת.
משפט – כל הזויות ההיקפיות במעגל הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
משפט – זוית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זוית ישרה ולהיפך.
משפט – על מיתרים שווים במעגל נשענות זויות היקפיות שוות או שסכומן 180^{o} ולהיפך.
משפט – על קשתות שוות במעגל נשענות זויות היקפיות שוות ולהיפך.
זוית פנימית – זוית הנוצרת בין שני מיתרים הנחתכים בתוך המעגל.
משפט – זוית פנימית במעגל שווה לסכום שתי הזויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזוית והמשכיהן.
זוית חיצונית – זוית הנוצרת בין המשכי שני מיתרים הנפגשים מחוץ למעגל.
משפט – זוית חיצונית למעגל שווה להפרש שבין שתי הזויות ההיקפיות הנשענות על הקשתות הכלואות בין שוקי הזוית.

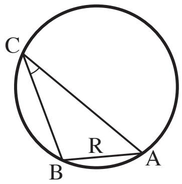
תרגילים
(זויות במעגל)

זוית היקפית וזוית מרכזית הנשענות על אותה קשת

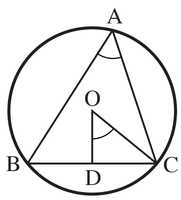
1) AB ו-AC הם מיתרים במעגל שמרכזו O. הרדיוס BO חותך את המיתר AC בנקודה D.
נתון: $\measuredangle BDC = 72^\circ$, $AB \parallel CO$.
חשב את הזויות A ו-B.



2) AB הוא מיתר במעגל השווה באורכו לרדיוס המעגל.
מצא את גודלה של זוית היקפית חדה הנשענת על המיתר ($\measuredangle C$).



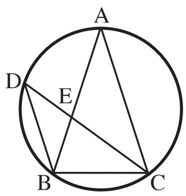
3) BC הוא מיתר במעגל שמרכזו O. זוית BAC היא זוית היקפית כלשהי הנשענת על הקשת BC. הנקודה D היא אמצע BC.
הוכח: $\measuredangle BAC = \measuredangle DOC$.



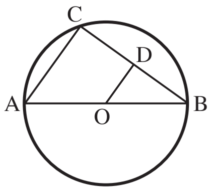
זויות היקפיות הנשענות על אותה קשת

4) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC$ והוא חסום במעגל. הנקודה D נמצאת על המשך הבסיס BC מהצד של C כך ש-$CD = AC$. AD חותך את המעגל בנקודה E.
הוכח: BE חוצה את זוית ABC.

5) המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$). המיתר CD חוצה את זוית ACB וחותך את המיתר AB בנקודה E. נתון: $BD \parallel AC$.
א. חשב את זויות המשולש ABC.
ב. הוכח: $DE = BE$.



זווית היקפית הנשענת על קוטר

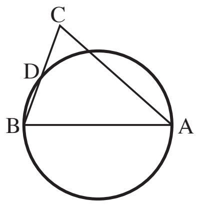


6) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. הנקודה D נמצאת על המיתר BC. נתון: $OD \parallel AC$.

הוכח: א. $OD \perp BC$.

ב. $CD = BD$.

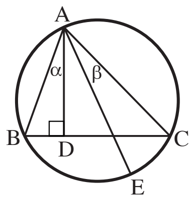
ג. $OD = \frac{1}{2}AC$.



7) AB הוא קוטר במעגל. הנקודה C נמצאת מחוץ למעגל כך שמתקיים $AC = AB$. הקטע CB חותך את המעגל בנקודה D.

הוכח: א. $BD = CD$.

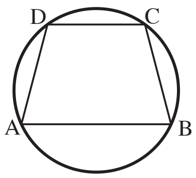
ב. המיתר AD חוצה את זווית BAC.



8) ABC הוא משולש החסום במעגל. AD הוא הגובה לצלע BC ו-AE הוא קוטר.

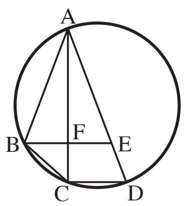
הוכח: $\alpha = \beta$.

זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות



9) המרובע ABCD הוא טרפז החסום במעגל ($AB \parallel DC$).

הוכח: הטרפז הוא **שווה שוקיים.**



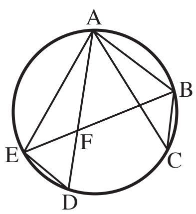
10) דרך הנקודות A, B, C ו-D עובר מעגל. E נקודה על המיתר AD. הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה F.

נתון: $BC = CD$, $AB = AE$.

א. הוכח: $BF = EF$.

ב. נתון: $BE \parallel CD$.

הוכח: AD הוא קוטר במעגל.

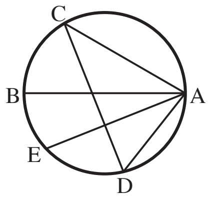


11) הנקודות A, B, C, D ו-E נמצאות על המעגל. המיתרים BE ו-AD נחתכים בנקודה F. נתון: $AC = AE$, $BC = EF$.

הוכח: א. $\Delta ABC \cong \Delta AFE$.

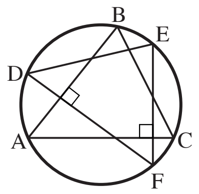
ב. $BC = ED$.

12) AB הוא קוטר במעגל.
AC, AD, AE ו-CD
הם מיתרים במעגל.
נתון: $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DE}$.
הוכח: $AE \perp CD$.

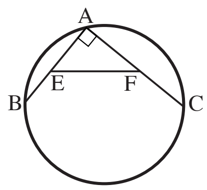


בעיות שונות — זויות במעגל

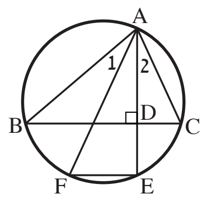
13) המשולשים ABC ו-DEF
חסומים במעגל.
נתון: $AB \perp DF$, $AC \perp EF$.
הוכח: $BC = DE$.



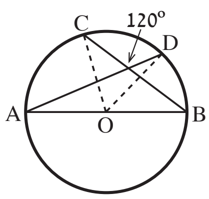
14) AB ו-AC הם מיתרים
במעגל המאונכים זה לזה.
הנקודות E ו-F הן
בהתאמה אמצעי המיתרים.
הוכח: הקטע EF שווה לרדיוס המעגל.



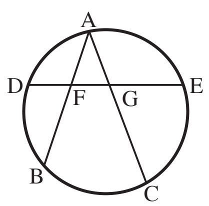
15) AD הוא גובה במשולש ABC החסום
במעגל. AF הוא קוטר. המשך AD
חותך את המעגל בנקודה E.
הוכח: א. $FE \parallel BC$.
ב. $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_2$.
(**הדרכה:** היעזר בתרגיל 9 שבעמ' הקודם).



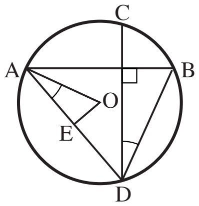
16) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
AD ו-BC הם מיתרים שהזווית
הקהה ביניהם היא 120^o.
הוכח: המשולש COD הוא שווה צלעות.
(**הדרכה:** התבונן במשולש ABC).



17) AB ו-AC הם מיתרים במעגל הנחתכים
ע"י המיתר DE בנקודות F ו-G.
נתון: הנקודה D היא אמצע הקשת AB
והנקודה E היא אמצע הקשת AC.
הוכח: המשולש AFG הוא שווה שוקיים.



18) AB ו-CD הם שני מיתרים במעגל שמרכזו O הניצבים זה לזה. הנקודה E היא אמצע המיתר AD.

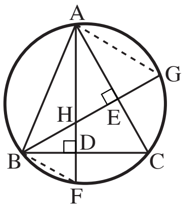


א. הוכח: $\sphericalangle BDC = \sphericalangle EAO$.

ב. נתון: $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAO$. הוכח: $AB = AD$.

ג. נתון: $\sphericalangle ADC = 1.6\sphericalangle BDC$. חשב את זויות המשולש ABD. (**הדרכה:** סמן $\sphericalangle BDC = x$).

19) המשולש ABC חסום במעגל. AD ו-BE הם גבהים במשולש שנחתכים בנקודה H. המשכי הגבהים חותכים את המעגל בנקודות F ו-G.



א. הוכח: $AH = AG$, $BH = BF$.

ב. שרטט בציור את הקטע CH והמשך אותו מהצד של H עד שיחתוך את המעגל בנקודה שתסומן ב-I. הוכח: $BF = BI$.

הוכחת משפטים — זויות במעגל

20) הוכח את המשפט:

זוית מרכזית במעגל גדולה פי 2 מכל זוית היקפית הנשענת על אותה קשת.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 225).

21) הוכח את המשפט:

זוית היקפית במעגל הנשענת על קוטר היא זוית ישרה.

22) הוכח את המשפט:

על מיתרים שווים במעגל נשענות זויות היקפיות שוות או שסכומן 180^o ולהיפך.

תשובות (זויות במעגל):

1) 24^o, 48^o. **2)** 30^o. **5)** א. 36^o, 72^o, 72^o. **18)** ג. 50^o, 65^o, 65^o.

משיק למעגל

סעיף זה כולל תרגילים על **משיק למעגל**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 257–283.

משיק למעגל

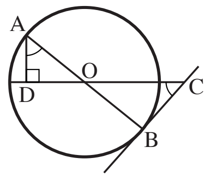
סיכום המושגים העיקריים

משיק למעגל – ישר שיש לו נקודה אחת ויחידה משותפת עם המעגל. הנקודה המשותפת נקראת נקודת **ההשקה** או נקודת **המגע**.
משפט – משיק למעגל מאונך לרדיוס בקצהו ולהיפך.
משפט – שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
משפט – הקטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים למעגל חוצה את הזווית שבין המשיקים, מאונך למיתר המחבר את נקודות ההשקה, חוצה אותו וחוצה את הקשת המתאימה.
משפט – הזווית בין משיק למיתר במעגל הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר (מצידו השני).

תרגילים
(משיק למעגל)

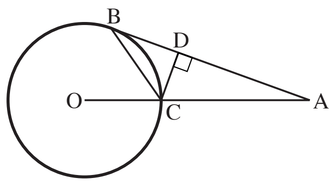
הזווית בין משיק לרדיוס

1) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. BC משיק למעגל בנקודה B. AD ניצב להמשך הקטע CO.
א. הוכח: $\sphericalangle A = \sphericalangle C$.
ב. האם המשולשים ADO ו-CBO חופפים? נמק.

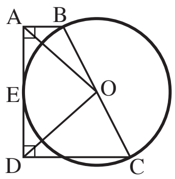


2) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B.
הקטע AO חותך את המעגל בנקודה C.
CD הוא אנך למשיק AB.

הוכח: המיתר BC חוצה את זווית DCO.
(**הדרכה:** העבר את הרדיוס BO).

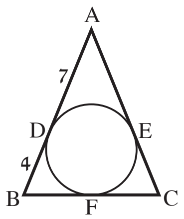


3) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית ($\sphericalangle A = 90^o$).
השוק AD נוגעת במעגל שמרכזו O בנקודה E
והשוק BC היא קוטר במעגל.
א. הוכח: $AO = DO$.
ב. הוכח: $AB + DC = BC$.



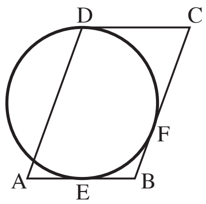
שני משיקים למעגל

4) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC). צלעות המשולש משיקות למעגל בנקודות D, E ו-F.
נתון: AD = 7 ס"מ, BD = 4 ס"מ.
א. חשב את היקף המשולש ABC.
ב. הוכח שהנקודה F היא אמצע BC.



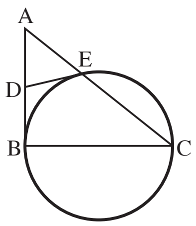
5) המרובע ABCD הוא מקבילית שצלעותיה AB, BC ו-CD משיקות למעגל בנקודות E, F ו-D.
נתון: AE = 5 ס"מ, AD = 19 ס"מ.

חשב את הצלע AB.
(**הדרכה:** סמן BE = x).



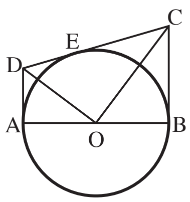
6) BC הוא קוטר במעגל. AB מאונך ל-BC. הנקודה D נמצאת על AB כך שהקטע DE משיק למעגל בנקודה E. הנקודות A, E ו-C נמצאות על ישר אחד.

הוכח: הנקודה D היא אמצע הקטע AB.
(**הדרכה:** העבר את הקטע BE).



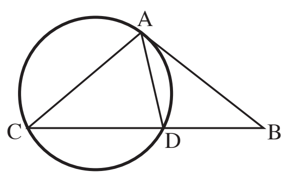
7) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. BC, AD ו-CD משיקים למעגל בנקודות B, A ו-E בהתאמה.

הוכח: $\measuredangle DOC = 90^\circ$.

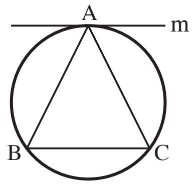


זוית בין משיק למיתר

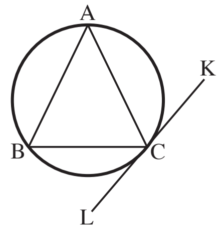
8) מהנקודה B יוצא משיק למעגל בנקודה A וחותך BDC. נתון: AD = BD.
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה שוקיים.
ב. נתון: $\measuredangle ADC = \alpha$.
הבע בעזרת α את זוית CAD.



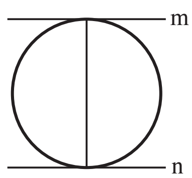
9) ABC הוא משולש החסום במעגל.
הישר m משיק למעגל בנקודה A.
א. נתון: $AB = AC$.
הוכח: הבסיס BC מקביל לישר m.
ב. הוכח את הטענה ההפוכה לזו שבסעיף **א'**.



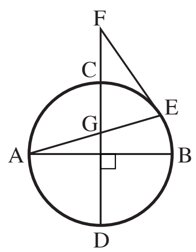
10) ABC הוא משולש החסום במעגל.
KL משיק למעגל בנקודה C.
נתון: $AB = AC$.
א. הוכח: AC חוצה את הזווית BCK.
ב. נסמן: $\sphericalangle A = \alpha$.
הבע באמצעות α את הזוויות BCK ו-ACL.



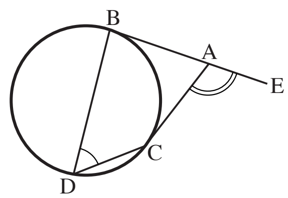
11) m ו-n הם שני ישרים המקבילים זה לזה שמשיקים למעגל.
הוכח: המיתר המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר. (**הדרכה:** בחר נקודה על המעגל וחבר אותה עם כל אחת מנקודות ההשקה).



12) AB ו-CD הם קטרים במעגל המאונכים זה לזה. FE משיק למעגל בנקודה E. הנקודה F נמצאת על המשך CD.
AE חותך את CD בנקודה G.
הוכח: $FG = FE$.

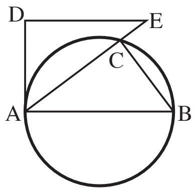


13) AB ו-AC נוגעים במעגל בנקודות B ו-C. הנקודה D נמצאת על הקשת BC הגדולה והנקודה E נמצאת על המשך AB.
הוכח: $\sphericalangle CAE = 2\sphericalangle BDC$.

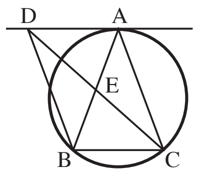


14) BC הוא מיתר במעגל שמרכזו O. D היא נקודה על הקשת הקטנה BC כך שהרדיוס OD מאונך למיתר BC. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך OD מהצד של D בנקודה A.
הוכח: המיתר BD חוצה את זוית ABC.

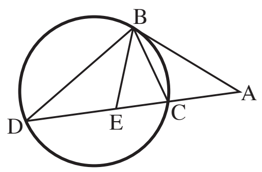
בעיות שונות — משיק למעגל



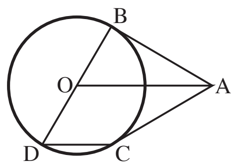
15) המשולש ABC חסום במעגל כך שהצלע AB היא קוטר. AD משיק למעגל בנקודה A.
הנקודה E נמצאת על המשך AC.
נתון: AD = BC, AE = AB.
הוכח: DE || AB, $DE \perp AD$.



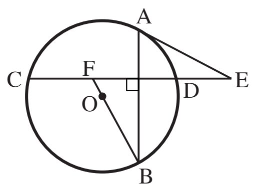
16) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו AB = AC והוא חסום במעגל. דרך A עובר משיק למעגל.
D היא נקודה על המשיק מהצד של AB כך שמתקיים AD = BC. הקטעים AB ו-DC נחתכים בנקודה E.
הוכח: BD = AC, DE = CE.



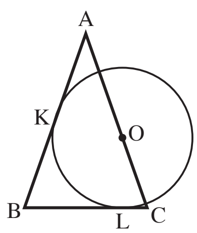
17) מנקודה A יוצאים משיק למעגל בנקודה B וחותך ACD.
הנקודה E נמצאת על DC כך ש-BE חוצה את זווית DBC.
הוכח: AB = AE.



18) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C.
BD הוא קוטר.
הוכח: DC || AO.

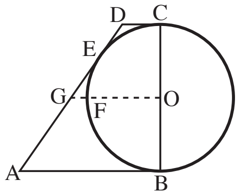


19) AB ו-CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O המאונכים זה לזה. הנקודה E נמצאת על המשך CD. הנקודה F היא החיתוך של המשך BO עם CD. נתון ש-AE משיק למעגל בנקודה A.
הוכח: $\sphericalangle BAE = \sphericalangle BFE$. (**רמז:** המשך את BF).



20) הצלע AC של משולש שווה שוקיים ABC (AB = AC) עוברת דרך מרכז המעגל O. הצלע AB משיקה למעגל בנקודה K והצלע BC משיקה למעגל בנקודה L.
א. נתון שהנקודה K היא אמצע הצלע AB. חשב את זויות המשולש ABC. (**רמז:** התבונן במשולש ABO).
ב. נתון: BL = m, LC = n. הבע באמצעות m ו-n את היקף המשולש ABC.

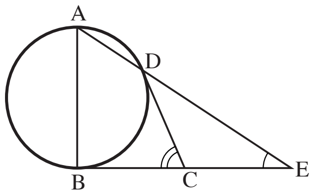
21) BC הוא קוטר במעגל שמרכזו O. שלוש מצלעות המרובע ABCD משיקות למעגל בנקודות B, C ו-E. הנקודה G היא על הצלע AD והקטע GO חותך את המעגל בנקודה F. נתון: GO || AB.



א. הוכח שהמרובע ABCD הוא טרפז ושהקטע GO הוא קטע האמצעים.

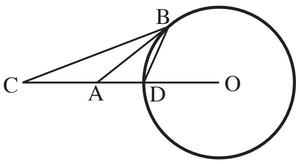
ב. נתון: GF = 1 ס"מ והיקף הטרפז ABCD הוא 34 ס"מ. חשב את רדיוס המעגל.
(**רמז:** שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.)

22) AB הוא קוטר במעגל. CB ו-CD משיקים למעגל בנקודות B ו-D. המשכי AD ו-CB נפגשים בנקודה E.



הוכח: $\measuredangle DCB = 2\measuredangle E$.
(**הדרכה:** העבר את הקטע BD והוכח תחילה שזווית E שווה לזווית ABD.)

23) AB נוגע במעגל שמרכזו O בנקודה B. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה D. הנקודה C נמצאת על המשך AO כך שמתקיים: AB = AC.



הוכח: $\measuredangle CBD = 45^\circ$. (**הדרכה:** המשך את DO מהצד של O עד שיחתוך את המעגל. סמן את נקודת החיתוך ב-E והיעזר במשולש DBE.)

הוכחת משפטים — משיק למעגל

24) הוכח את המשפט:

א. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.

ב. הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה שממנה יוצאים שני המשיקים חוצה את הזווית שבין המשיקים.

25) הוכח את המשפט:

הזווית בין משיק למיתר הנפגשים בנקודת ההשקה שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר (מצידו השני).

(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 270).

תשובות (משיק למעגל):

1) ב. לא. **4)** א. 30 ס"מ. **5)** 12 ס"מ. **8)** ב. $180^\circ-1.5\alpha$. **10)** ב. $180^\circ-\alpha$, $90^\circ+\frac{\alpha}{2}$.
20) א. 36°, 72°, 72°. ב. $5m+n$. **21)** ב. 5 ס"מ.

שני מעגלים

סעיף זה כולל תרגילים על **שני מעגלים**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 284–301.

שני מעגלים

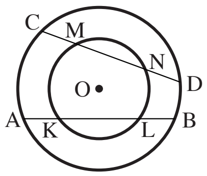
סיכום המושגים העיקריים

מעגלים חותכים – מעגלים שיש להם שתי נקודות משותפות.
מעגלים זרים – מעגלים שאין להם אף נקודה משותפת.
מעגלים פנימיים – מעגלים זרים שאחד נמצא בתוך השני.
מעגלים מרכזיים – מעגלים שיש להם מרכז משותף.
מעגלים חיצוניים – מעגלים זרים שאחד נמצא מחוץ לשני.
מעגלים משיקים – מעגלים שיש להם נקודה אחת משותפת.
מעגלים משיקים מבפנים – מעגלים משיקים שאחד נמצא בתוך השני.
מעגלים משיקים מבחוץ – מעגלים משיקים שאחד נמצא מחוץ לשני.
קטע המרכזים – הקטע המחבר את מרכזי המעגלים.
משפט – קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, או המשכו, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
משפט – נקודת ההשקה של שני מעגלים משיקים נמצאת על קטע המרכזים אם המעגלים משיקים מבחוץ או על המשכו אם המעגלים משיקים מבפנים.

תרגילים
(שני מעגלים)

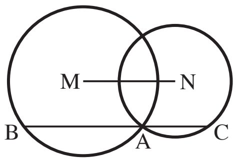
מעגלים חותכים ומעגלים זרים

1) נתונים שני מעגלים בעלי מרכז משותף O.
AB ו-CD הם מיתרים במעגל הגדול
והם חותכים את המעגל הקטן בהתאמה
בנקודות K, L, M ו-N. נתון: AB = CD.
הוכח: KL = MN.



2) הנקודה A היא אחת מנקודות החיתוך של שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N. הנקודה B נמצאת על המעגל הגדול והנקודה C נמצאת על המעגל הקטן כך שהקטע BC עובר דרך A. נתון: $MN \parallel BC$.

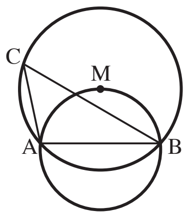
הוכח: $MN = \frac{1}{2}BC$.



3) שני המעגלים שבציור נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול והיא נמצאת על המעגל הקטן. הקטע AB הוא קוטר במעגל הקטן. הנקודה C נמצאת על המעגל הגדול.

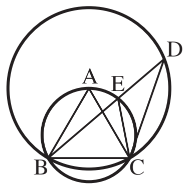
א. חשב את זווית ACB.

ב. נתון ש-AC שווה לרדיוס המעגל הגדול. מצא את שתי הזויות האחרות של המשולש ABC.



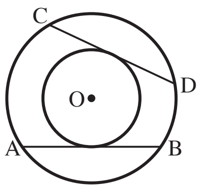
4) ABC הוא משולש שווה שוקיים שבו $AB = AC$ והוא חסום במעגל הקטן. הנקודה A היא מרכז המעגל הגדול. BD הוא מיתר במעגל הגדול והוא חותך את המעגל הקטן בנקודה E.

הוכח: א. $\measuredangle BDC = \frac{1}{2}\measuredangle BEC$. ב. $CE = DE$.



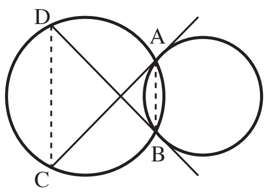
5) שני המעגלים שבציור הם בעלי מרכז משותף O. AB ו-CD הם מיתרים במעגל הגדול המשיקים למעגל הקטן.

הוכח: $AB = CD$.



6) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. המשיקים למעגל הימני בנקודות A ו-B חותכים את המעגל השמאלי גם בנקודות C ו-D.

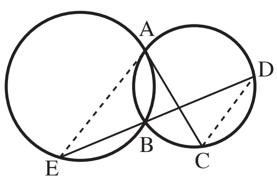
הוכח: $CD \parallel AB$.



7) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. AC הוא מיתר במעגל הימני והוא משיק בנקודה A למעגל השמאלי. דרך הנקודה B עובר ישר החותך את המעגלים בנקודות D ו-E.

הוכח: $AE \parallel CD$.

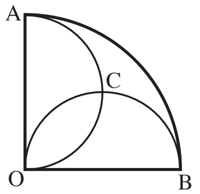
(הדרכה: היעזר במשפט על הזוית בין משיק למיתר).



מעגלים משיקים

8) על כל אחד מהרדיוסים AO ו-BO של רבע עיגול בנו חצאי מעגלים הנפגשים בנקודה C.

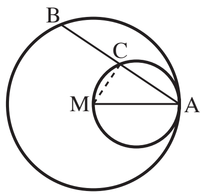
הוכח: הנקודות A, C ו-B נמצאות על ישר אחד.



9) שני המעגלים שבציור משיקים מבפנים בנקודה A. הנקודה M היא מרכז המעגל הגדול. AM הוא קוטר במעגל הקטן. המיתר AB שבמעגל הגדול חותך את המעגל הקטן בנקודה C.

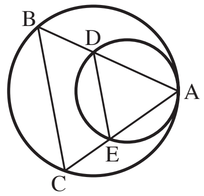
הוכח: א. $MC \perp AB$.

ב. $BC = AC$.



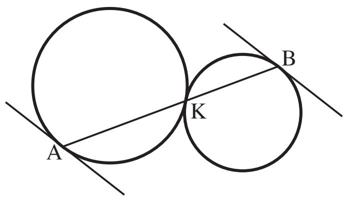
10) שני המעגלים משיקים מבפנים בנקודה A. AB ו-AC הם מיתרים במעגל הגדול והם חותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו-E בהתאמה.

הוכח: $BC \parallel DE$. (**הדרכה:** העבר את **המשיק המשותף** דרך הנקודה A.)



11) שני מעגלים נוגעים זה בזה מבחוץ בנקודה K. AK הוא מיתר במעגל הגדול ו-BK הוא מיתר במעגל הקטן כך שהנקודות A, K ו-B נמצאות על ישר אחד.

הוכח: המשיק למעגל הגדול בנקודה A והמשיק למעגל הקטן בנקודה B מקבילים זה לזה.



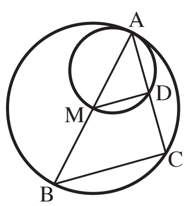
12) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ בנקודה K. דרך K עוברים שני ישרים AB ו-CD שחותכים את המעגל M בנקודות A ו-C ואת המעגל N בנקודות B ו-D.

הוכח: $AC \parallel BD$.

13) שני מעגלים משיקים מבפנים בנקודה A. AB הוא קוטר במעגל הגדול שמרכזו M. AM הוא קוטר במעגל הקטן. המיתר AC חותך את המעגל הקטן בנקודה D.

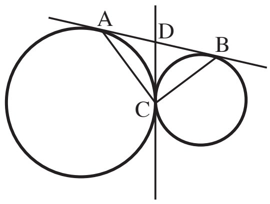
הוכח: $MD \parallel BC$, $MD = \frac{1}{2} BC$.

(**רמז:** קטע אמצעים).



14) שני מעגלים משיקים מבחוץ בנקודה C. AB הוא משיק משותף למעגלים בנקודות A ו-B בהתאמה. המשיק המשותף למעגלים בנקודה C חותך את AB בנקודה D.

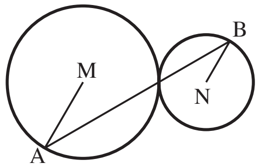
הוכח: א. $AD = BD$. ב. $\sphericalangle ACB = 90^\circ$.



בעיות שונות — שני מעגלים

15) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N משיקים מבחוץ. A ו-B הן נקודות על המעגלים כך שהקטע AB עובר דרך נקודת המגע.

הוכח: $AM \parallel BN$.



16) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. משיק משותף נוגע במעגל אחד בנקודה C ובמעגל השני בנקודה D.

הוכח: $\sphericalangle CAD + \sphericalangle CBD = 180^\circ$.

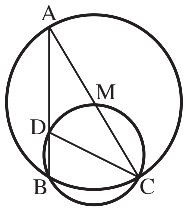
17) שני מעגלים נחתכים בנקודות B ו-C. המעגל הקטן עובר דרך הנקודה M שהיא מרכז המעגל הגדול. המשך CM חותך את המעגל הגדול בנקודה A. AB חותך את המעגל הקטן בנקודה D.

א. הוכח: CD הוא קוטר במעגל הקטן.

(**הדרכה:** הוכח: $\sphericalangle ABC = 90^\circ$).

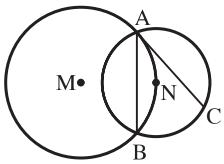
ב. הוכח: $AD = CD$.

ג. סמן ב-N את מרכז המעגל הקטן. הוכח: $MN \parallel AB$.



18) שני מעגלים שמרכזיהם M ו-N נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה N נמצאת על המעגל שמרכזו M. המשיק בנקודה A למעגל שמרכזו M חותך את המעגל שמרכזו N גם בנקודה C.

הוכח: $AB = AC$. (**הדרכה:** חבר את אמצעי המיתרים AB ו-AC עם המרכז N והוכח שהמיתרים נמצאים במרחקים שווים מהמרכז).



הוכחת משפטים — שני מעגלים

19) הוכח את המשפט:

קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, או המשכו, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

תשובות (שני מעגלים):

3) א. 45°. ב. 30°, 105°.

מעגל חוסם וחסום

סעיף זה כולל תרגילים על **מעגל חוסם וחסום** במשולש, במרובעים ובמצולעים משוכללים. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 302–337.

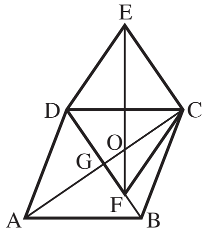
מעגל חוסם וחסום
סיכום המושגים העיקריים

מעגל חוסם משולש – המעגל שעובר דרך שלושת קודקודיו של המשולש.
משפט – מרכז המעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים לצלעות המשולש.
מעגל חסום במשולש – המעגל ששלוש צלעות המשולש משיקות לו.
משפט – מרכז המעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזויות של המשולש.
מרובע חסום במעגל – מרובע שכל ארבעת קודקודיו על המעגל.
משפט – בכל מרובע החסום במעגל סכום כל שתי זויות נגדיות הוא 180°.
משפט הפוך – אם במרובע יש זוג אחד של זויות נגדיות שסכומן 180° אז ניתן לחסום אותו במעגל.
מרובע חוסם מעגל – מרובע שכל צלעותיו משיקות למעגל.
משפט – במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
משפט הפוך – אם במרובע קמור סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז אפשר לחסום מעגל במרובע.
משפט – כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
משפט – בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

תרגילים
(מעגל חוסם וחסום)

מעגל חוסם משולש

1) המרובעים ABCD ו-DECF הם מעוינים. (הנקודה F נמצאת על BD). הנקודה O היא החיתוך של EF ו-AC.

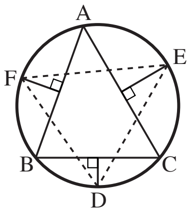


א. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החוסם את המשולש BDC.

ב. מצא את המשולש שהנקודה F היא מרכז המעגל החוסם אותו.

ג. היכן נמצא מרכז המעגל החוסם את המשולש ABG ? הסבר.

2) המשולש ABC חסום במעגל. מחוץ למשולש העלו אנכים אמצעיים לצלעות המשולש שחותכים את המעגל בנקודות D, E ו-F.

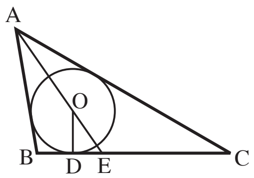


א. נתון: $\measuredangle A = 50^o$, $\measuredangle B = 70^o$.
חשב את זויות המשולש DEF.
(**הדרכה:** המשך את האנכים האמצעיים לתוך המשולש ABC, הם נפגשים במרכז המעגל).

ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף **א'**). נסמן: $\measuredangle A = \alpha$, $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$.
הוכח שזויות המשולש DEF הן: $90^o - \frac{\alpha}{2}$, $90^o - \frac{\beta}{2}$, $90^o - \frac{\gamma}{2}$.

מעגל חסום במשולש

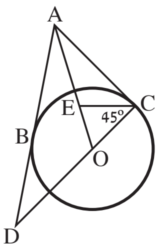
3) בתוך משולש ABC חסום מעגל שמרכזו O.
נקודת ההשקה של הצלע BC היא D.
המשך AO חותך את הצלע BC בנקודה E.



א. נתון: $\measuredangle C = 30^o$, $\measuredangle B = 100^o$.
חשב את זוית DOE.

ב. (ללא קשר לנתון של סעיף **א'**).
נסמן: $\measuredangle B = \beta$, $\measuredangle C = \gamma$. $(\beta > \gamma)$. הוכח: $\measuredangle DOE = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

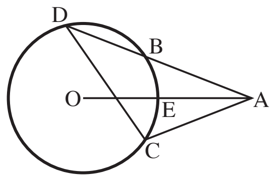
4) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C בהתאמה. המשך AB והמשך CO נחתכים בנקודה D.
הנקודה E נמצאת על AO כך שמתקיים $\measuredangle ECO = 45^o$.



א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל החסום במשולש ACD.

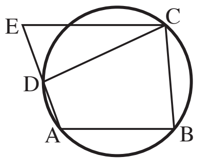
ב. הוכח: ED חוצה את הזוית D.

5) הנקודות B, C ו-D נמצאות על מעגל שמרכזו O. הנקודה A נמצאת על המשך BD. AO חותך את המעגל בנקודה E. נתון: $AB = AC$.
א. הוכח: $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{CE}$.
ב. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל החסום במשולש ACD.



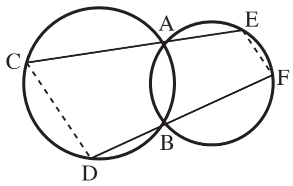
התכונה של מרובע החסום במעגל

6) המרובע ABCD חסום במעגל. הנקודה E נמצאת על המשך AD. נתון: $EC \parallel AB$.
א. הוכח: $\sphericalangle CED = \sphericalangle BCD$.
ב. נתון: $\sphericalangle A = 110^o$, $\sphericalangle B = 85^o$.
חשב את זווית DCE.



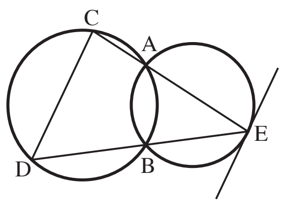
7) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל הגדול והנקודות E ו-F נמצאות על המעגל הקטן כך שהקטע CE עובר דרך הנקודה A והקטע DF עובר דרך הנקודה B.

הוכח: $CD \parallel EF$.



8) שני מעגלים נחתכים בנקודות A ו-B.
הנקודות C ו-D נמצאות על המעגל הגדול והנקודה E נמצאת על המעגל הקטן כך שהקטע CE עובר דרך A והקטע DE עובר דרך B.

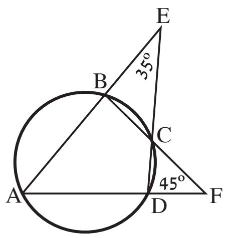
הוכח: המשיק למעגל הקטן בנקודה E מקביל למיתר CD.



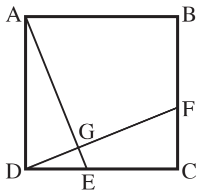
9) הנקודות A, B, C ו-D נמצאות על המעגל.
המשך AB והמשך DC נפגשים בנקודה E.
המשך BC והמשך AD נפגשים בנקודה F.
נתון: $\sphericalangle E = 35^o$, $\sphericalangle F = 45^o$.

חשב את זווית A.

(הדרכה: שים לב שמתקיים $\sphericalangle A = \sphericalangle BCE = \sphericalangle DCF$.)



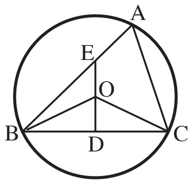
התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום אותו במעגל



10) המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודות E ו-F נמצאות בהתאמה על הצלעות CD ו-BC. הקטעים AE ו-DF נחתכים בנקודה G. נתון: CF = DE.

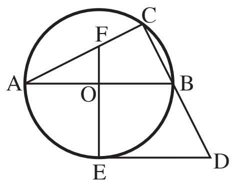
א. הוכח: המרובע ABFG הוא בר חסימה.

ב. מצא בציור שתי נקודות שהן קצות קוטר של המעגל החוסם (נמק).



11) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. הנקודה D היא אמצע BC. המשך DO חותך את AB בנקודה E.

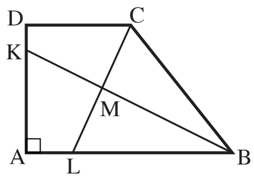
הוכח: את המרובע AEOC אפשר לחסום במעגל.



12) המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O כך ש-AB הוא קוטר. DE נוגע במעגל בנקודה E. הנקודה D נמצאת על המשך BC. הנקודה F נמצאת על AC ועל המשך OE.

א. הוכח: את המרובע CDEF אפשר לחסום במעגל.

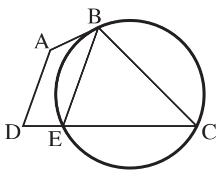
ב. נתון: AB || DE. הוכח: $\sphericalangle CFO = \sphericalangle DBO$.



13) המרובע ABCD הוא טרפז ישר זווית (AB || DC, $\sphericalangle A = 90^o$). BK ו-CL חוצים בהתאמה את הזויות B ו-C והם נחתכים בנקודה M.

א. הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע KMLA.

ב. חבר את A עם M ואת L עם K. הוכח: $\sphericalangle AKL = \sphericalangle AML$.

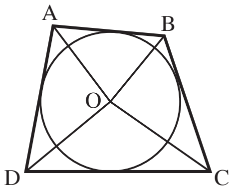


14) ABCD הוא מרובע שבו הצלע AB משיקה למעגל בנקודה B, הצלע BC היא מיתר במעגל והצלע DC חותכת את המעגל בנקודה E. נתון: AD || BE.

א. הוכח: את המרובע ABCD אפשר לחסום במעגל.

ב. הוכח: $\sphericalangle DEB = \sphericalangle ABC$.

התכונה של מרובע החוסם מעגל

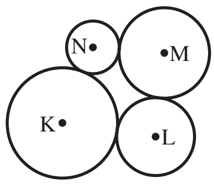


15) המרובע ABCD חוסם מעגל שמרכזו O.

הוכח: $\measuredangle AOB + \measuredangle DOC = 180^\circ$.

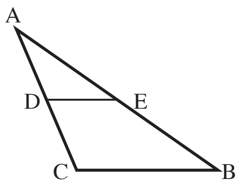
16) הוכח: אם בטרפז שווה שוקיים אפשר לחסום מעגל אז קטע האמצעים שווה לשוק.

התכונה שאם מרובע מקיים אז ניתן לחסום בתוכו מעגל



17) ארבעה מעגלים שמרכזיהם K, L, M ו-N משיקים כמתואר בציור.

הוכח: במרובע KLMN אפשר לחסום מעגל.

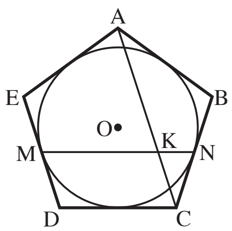


18) DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

נתון: $AC + AB = 3BC$.

הוכח: במרובע DEBC אפשר לחסום מעגל.

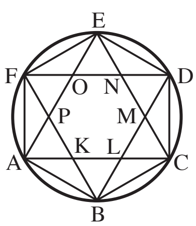
מצולע חסום במעגל ומצולע חוסם מעגל



19) ABCDE הוא מחומש משוכלל החוסם מעגל שמרכזו O. M ו-N הן שתיים מנקודות ההשקה. האלכסון AC חותך את הקטע MN בנקודה K.

א. הוכח שמרובע MKCD הוא מקבילית.

ב. נתון שהיקף המחומש הוא P.
הבע באמצעות P את היקף המקבילית.



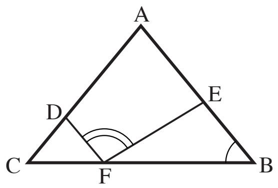
20) ABCDEF הוא משושה שווה צלעות החסום במעגל. חלק מאלכסוניו יוצרים משושה KLMNOP.

א. הסבר מדוע המשושה ABCDEF הוא משושה משוכלל.

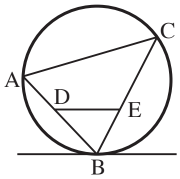
ב. הוכח: את המשושה KLMNOP אפשר לחסום במעגל ואפשר לחסום בתוכו מעגל.
(**הדרכה:** הוכח שהמשושה הוא משוכלל).

בעיות שונות — מעגל חוסם וחסום

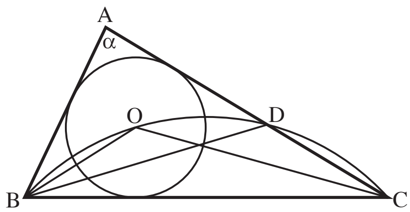
21) המשולש ABC הוא שווה שוקיים (AB = AC). הנקודות D, E ו-F נמצאות על צלעות המשולש.
נתון: $\measuredangle DFE = 2\measuredangle B$.
הוכח: אפשר לחסום במעגל את המרובע ADFE.



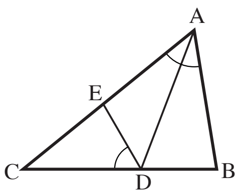
22) המשולש ABC חסום במעגל.
דרך הנקודה B עובר משיק למעגל.
הקטע DE מקביל למשיק.
הוכח: את המרובע ADEC אפשר לחסום במעגל.



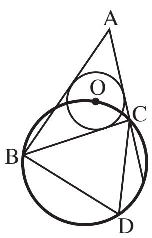
23) מעגל שמרכזו O חסום במשולש ABC.
דרך הנקודות B, O ו-C עובר מעגל שחותך את הצלע AC בנקודה D.
נסמן: $\measuredangle A = \alpha$.
הוכח: א. $\measuredangle BOC = 90^o + \frac{\alpha}{2}$.
ב. AB = AD.



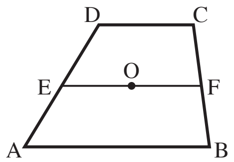
24) במשולש ABC D היא נקודה על BC ו-E היא נקודה על AC כך שמתקיים BD = ED. נתון: $\measuredangle CDE = \measuredangle BAC$.
הוכח: AD חוצה את זווית BAC.
(**הדרכה:** הוכח שהמרובע ABDE הוא בר חסימה).



25) בתוך משולש ABC חסום מעגל קטן שמרכזו O. המרכז O נמצא על מעגל גדול שחוסם את המשולש BDC.
א. נתון: $\measuredangle BDC = 65^o$. חשב את זווית A.
(**הדרכה:** מצא תחילה את זווית BOC).
ב. (ללא קשר לנתון של סעיף **א'**).
נסמן $\measuredangle D = \alpha$. הבע באמצעות α את זווית A.



26) המרובע ABCD הוא טרפז (AB || DC). הנקודה O נמצאת על הקטע EF שהוא קטע האמצעים בטרפז.

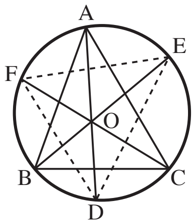


נתון: AE = EO, BF = FO.

א. הוכח: אפשר לחסום מעגל בטרפז ABCD.
(**רמז:** קטע האמצעים בטרפז שווה למחצית סכום הבסיסים).

ב. הוכח: הנקודה O היא מרכז המעגל החסום בטרפז. (**הדרכה:** הוכח שהנקודה O היא מפגש חוצי הזויות של הטרפז).

27) המשולש ABC חסום במעגל. הנקודה O היא מרכז המעגל **החסום** במשולש. המשכי הקטעים AO, BO ו-CO חותכים את המעגל החוסם בנקודות D, E ו-F.



א. נתון: $\sphericalangle A = 50^o$, $\sphericalangle B = 70^o$.
חשב את זויות המשולש DEF.
(**הדרכה:** שים לב שהמיתרים AD, BE ו-CF חוצים את זויות המשולש ABC).

ב. (ללא קשר לנתונים של סעיף **א'**). נסמן: $\sphericalangle A = \alpha$, $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$.
הוכח שזויות המשולש DEF הן: $\frac{\beta+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\gamma}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

הוכחת משפטים — מעגל חוסם וחסום

28) הוכח את המשפט:
בכל מרובע החסום במעגל סכום כל שתי זויות נגדיות הוא 180^o.
(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 311).

29) הוכח את המשפט:
במרובע חוסם מעגל סכום זוג אחד של צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 320).

תשובות (מעגל חוסם וחסום):

1) ב. ADC. ג. באמצע AB. **2)** א. 65^o, 55^o, 60^o. **3)** א. 35^o. **6)** ב. 25^o. **9)** 50^o.
10) ב. A, F. **19)** ב. $\frac{3}{5}P$. **25)** **א.** 50^o. **ב.** $180^o-2\alpha$. **27)** **א.** 65^o, 55^o, 60^o.

פרק חמישי

הנדסת המישור — שטחים ומשפט פיתגורס

שטחים של מרובעים ומשולש

פרק זה כולל תרגילים עם שטחים ומשפט פיתגורס. הסעיף הראשון כולל תרגילים עם **שטחי מרובעים ומשולש**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 338–367.

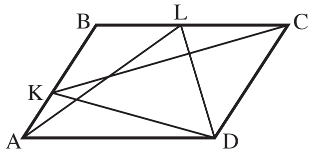
שטחים של מרובעים ומשולש
סיכום המושגים העיקריים

שטח **ריבוע** שווה למכפלת הצלע בעצמה.	$\boxed{S = a^2}$
שטח **מלבן** שווה למכפלת שתי צלעות סמוכות.	$\boxed{S = a \cdot b}$
שטח **מקבילית** שווה למכפלת צלע בגובה שלה.	$\boxed{S = a \cdot h_a}$
שטח **משולש** שווה למחצית מכפלת צלע בגובה שלה.	$\boxed{S = \frac{a \cdot h_a}{2}}$
שטח **טרפז** שווה למחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה.	$\boxed{S = \frac{(a+b) \cdot h}{2}}$
שטח **מרובע שאלכסוניו מאונכים** שווה למחצית מכפלת האלכסונים.	$\boxed{S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}}$
שטח **מעוין** שווה למכפלת הצלע בגובה או למחצית מכפלת האלכסונים.	$\boxed{S = a \cdot h}$ או $\boxed{S = \frac{k_1 \cdot k_2}{2}}$

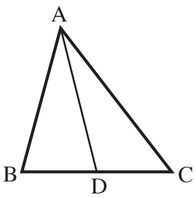
תרגילים
(שטחים של מרובעים ומשולש)

שטחים של ריבוע, מלבן, מקבילית, מעוין ומשולש

1) המרובע ABCD הוא מקבילית.
K ו-L הן נקודות כלשהן הנמצאות בהתאמה על הצלעות AB ו-BC.
הוכח: $S_{ALD} = S_{DKC}$.

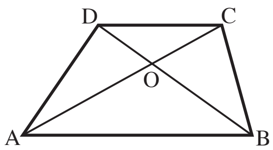


2) **א.** הוכח: **התיכון לצלע במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.**
(הדרכה: נתון: $BD = DC$.
צ"ל: $S_{ABD} = S_{ADC}$).
ב. נסח והוכח את הטענה ההפוכה לזו שבסעיף א'.

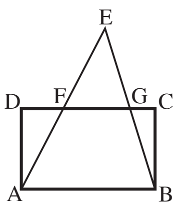


3) הוכח: **האלכסונים במקבילית מחלקים אותה לארבעה משולשים שווי שטח.**

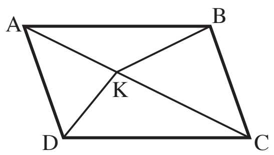
4) המרובע ABCD הוא טרפז שהבסיסים שלו הם AB ו-DC. אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה O.
הוכח: א. $S_{ABD} = S_{ABC}$.
ב. $S_{AOD} = S_{BOC}$.



5) המרובע ABCD הוא מלבן.
הנקודות F ו-G הן בהתאמה אמצעי הקטעים AE ו-BE.
הוכח: א. $DF + GC = FG$.
ב. $S_{AEB} = S_{ABCD}$.

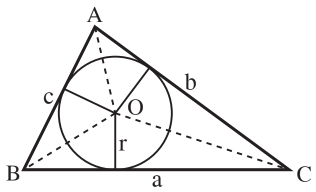


6) K היא נקודה כלשהי על האלכסון AC במקבילית ABCD.
הוכח: שטח המשולש ABK שווה לשטח המשולש ADK ושטח המשולש BKC שווה לשטח המשולש DKC. (**הדרכה:** הורד גבהים מ-B ו-D לאלכסון AC).



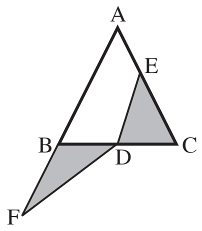
7) הוכח: **שטח משולש שווה למכפלת מחצית היקף המשולש ברדיוס המעגל החסום במשולש.**

(הדרכה: צ״ל: $S = \frac{a+b+c}{2} \cdot r$, חלק את המשולש לשלושה משולשים AOB, AOC ו-BOC).



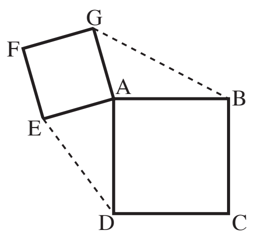
8) במשולש שווה שוקיים ABC הנקודה D היא אמצע הבסיס BC. הנקודה E נמצאת על השוק AC והנקודה F נמצאת על המשך השוק AB מהצד של B כך שמתקיים $CE = BF$.

הוכח: $S_{CED} = S_{BFD}$.



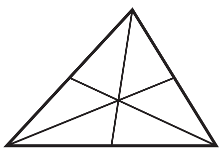
9) המרובעים ABCD ו-AEFG הם ריבועים.

הוכח: המשולשים ABG ו-AED הם שווי שטח.



10) במשולש העבירו את שלושת התיכונים.

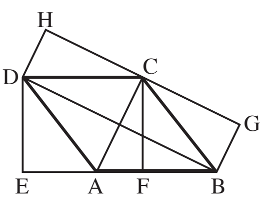
הוכח: ששת המשולשים הפנימיים שהתקבלו הם שווי שטח.



11) המרובע ABCD הוא מעוין והמרובעים DCFE ו-DBGH הם מלבנים.

הוכח: המלבנים הם שווי שטח.

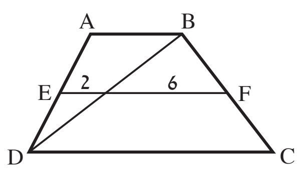
(הדרכה: חשב את שטח המעוין בשתי דרכים).



שטח טרפז

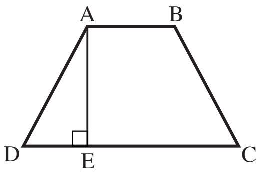
12) EF הוא קטע האמצעים בטרפז ABCD. האלכסון BD מחלק את הקטע EF לשני קטעים: 2 ס״מ ו-6 ס״מ. שטח הטרפז ABFE הוא 18 סמ״ר.

חשב את שטח הטרפז ABCD.

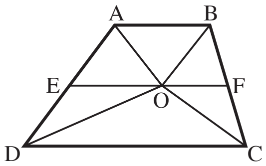


13) AE הוא גובה בטרפז שווה שוקיים
$ABCD$. נתון: $AE =$ 8 ס"מ,
$CE =$ 10 ס"מ.

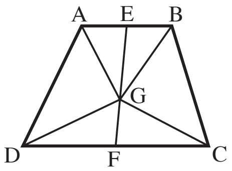
חשב את שטח הטרפז.



14) EF הוא קטע האמצעים בטרפז $ABCD$.
הנקודה O נמצאת על EF.
הוכח:
א. $S_{AOB} + S_{DOC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.
ב. $S_{AOB} + S_{DOC} = S_{AOD} + S_{BOC}$.



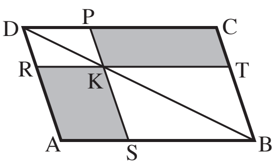
15) $ABCD$ הוא טרפז. הנקודות E ו-F
הן אמצעי הבסיסים. G נקודה על EF.
הוכח: א. $S_{AEFD} = S_{EBCF}$.
ב. $S_{ADG} = S_{BCG}$.
(**הדרכה:** היעזר בחיסור שטחים).



בעיות שונות — שטחים של מרובעים ומשולש

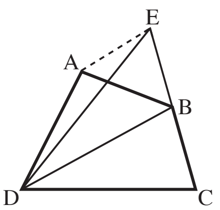
16) הנקודה K היא נקודה כלשהי על
האלכסון BD במקבילית $ABCD$.
המרובעים $ASKR$ ו-$KTCP$ הם
מקביליות.

הוכח: $S_{ASKR} = S_{KTCP}$.

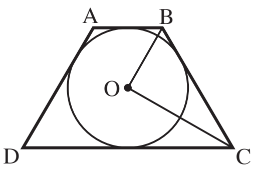


17) $ABCD$ הוא מרובע כלשהו. הנקודה
E נמצאת על המשך הצלע BC כך
שהקטע AE מקביל לאלכסון BD.

הוכח: שטח המרובע $ABCD$
שווה לשטח המשולש DEC.



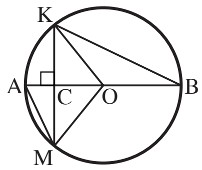
18) $ABCD$ הוא טרפז שווה שוקיים
החוסם מעגל שמרכזו O $(AB \parallel DC)$.
א. הוכח: $S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$.
ב. נסמן את הבסיסים ב-a ו-b ואת רדיוס
המעגל ב-r. הוכח: $BO \cdot CO = \frac{a+b}{2} \cdot r$.



19) AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. KM הוא מיתר המאונך ל-AB שחותך אותו בנקודה C.

א. הוכח: $S_{BOK} = S_{AOM}$.

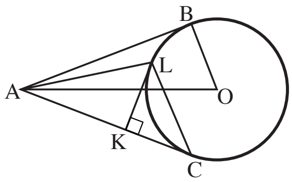
ב. נתון: $AB = 20$ ס״מ, $S_{BOK} = 40$ סמ״ר, $S_{ACM} = 16$ סמ״ר. חשב את KM ו-BC.



20) AB ו-AC משיקים למעגל שמרכזו O בנקודות B ו-C בהתאמה. הנקודה K נמצאת על AC כך ש-KL משיק למעגל בנקודה L ומאונך ל-AC.

א. הוכח: $S_{ABO} = S_{ALC}$.

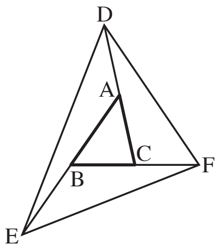
ב. נתון: $AB = 14$ ס״מ, $S_{ABO} = 35$ סמ״ר. חשב את שטח המשולש AKL.



21) האריכו את צלעותיו של משולש ABC כאורכן וקיבלו משולש DEF. ($CB = CF$, $BA = BE$, $AC = AD$).

הוכח: $S_{DEF} = 7S_{ABC}$.

(הדרכה: העבר את הקטעים AF, BD ו-CE והתבונן בשבעת המשולשים שבתוך המשולש DEF.)



הוכחת משפטים — שטחים של מרובעים ומשולש

22) הוכח את המשפט:

שטח מקבילית שווה למכפלת צלע בגובה שלה.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 342).

23) הוכח את המשפט:

שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה שלה.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 346).

24) הוכח את המשפט:

שטח טרפז שווה למחצית מכפלת סכום הבסיסים בגובה הטרפז.

(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 355).

תשובות (שטחים של מרובעים ומשולש):

2) **ב.** קטע במשולש המחבר קודקוד עם הצלע שמולו ומחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח הוא התיכון לצלע. **12)** 48 סמ״ר. **13)** 80 סמ״ר. **19)** ב. 16 ס״מ, 16 ס״מ. **20)** ב. 22.5 סמ״ר.

משפט פיתגורס

סעיף זה כולל תרגילים שבהם צריך להיעזר ב**משפט פיתגורס**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 368–388 ובעמ' 394–401.

משפט פיתגורס
סיכום המושגים העיקריים

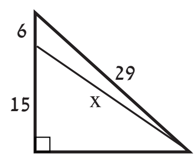
משפט פיתגורס – בכל משולש ישר זווית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.	$\boxed{a^2+b^2 = c^2}$
המשפט ההפוך למשפט פיתגורס – אם במשולש סכום שטחי הריבועים הבנויים על שתי צלעות שווה לשטח הריבוע הבנוי על הצלע השלישית אז המשולש הוא ישר זווית.	
בריבוע שצלעו a אורך האלכסון הוא	$\boxed{k = \sqrt{2}a}$
במשולש שווה צלעות שצלעו a הגובה הוא	$\boxed{h = \frac{\sqrt{3}}{2}a}$
והשטח הוא	$\boxed{S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

תרגילים
(משפט פיתגורס)

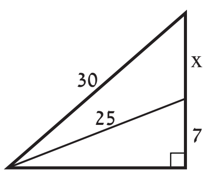
משפט פיתגורס במשולשים

1) מצא בתרגילים הבאים את הקטע המסומן ב-x :

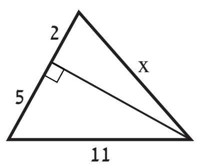
א.



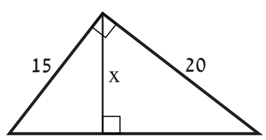
ב.



ג.

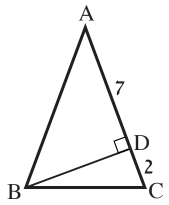


ד.

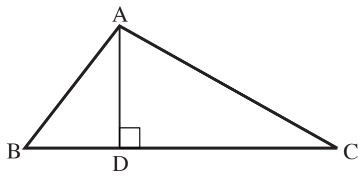


2) המשולש ABC הוא שווה שוקיים
$(AB = AC)$. BD הוא הגובה לשוק
AC והוא מחלק אותה לשני קטעים:
$AD = 7$ ס״מ, $DC = 2$ ס״מ.

חשב את הבסיס BC של המשולש ABC.



3) AD הוא הגובה לצלע BC במשולש ABC.
נתון: $AB = 10$ ס״מ, $AC = 17$ ס״מ,
$BC = 21$ ס״מ.
א. חשב את הגובה AD.
(**הדרכה:** סמן $BD = x$, הבע את
DC באמצעות x והיעזר במשפט
פיתגורס למשולשים ABD ו-ADC.)
ב. חשב את שטח המשולש ABC.

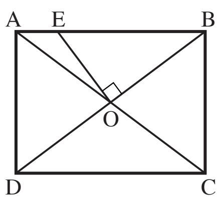


4) במשולש שווה שוקיים הגובה לבסיס הוא 12 ס״מ והיקף המשולש הוא 48 ס״מ.
מצא את:
א. צלעות המשולש. ב. שטח המשולש. ג. הגובה לשוק.

משפט פיתגורס במרובעים

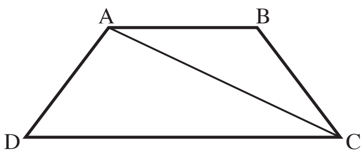
5) במלבן $ABCD$ האלכסונים נחתכים בנקודה O.
E היא נקודה על AB כך שמתקיים $EO \perp BD$.
נתון: $AD = 18$ ס״מ, $DO = 15$ ס״מ,
$EO = 11.25$ ס״מ.

חשב את הקטע AE.



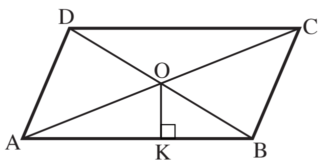
6) שטח של מעוין הוא 96 סמ״ר ואחד מאלכסוניו הוא 12 ס״מ.
א. חשב את האלכסון השני.
ב. חשב את צלע המעוין.
ג. חשב את גובה המעוין.

7) הטרפז $ABCD$ הוא שווה שוקיים $(AB \parallel DC)$.
האלכסון AC חוצה את זוית C.
נתון: $AB = 15$ ס״מ, $DC = 33$ ס״מ.
א. חשב את היקף הטרפז.
ב. חשב את שטח הטרפז.
ג. חשב את האלכסון AC.



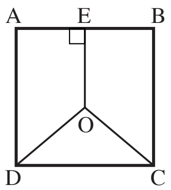
8) האלכסונים במקבילית ABCD נחתכים בנקודה O. מהנקודה O הורידו אנך OK לצלע AB. נתון: AK = 15 ס״מ, KB = 10 ס״מ, AD = 13 ס״מ.

חשב את שטח המקבילית.



9) O היא נקודה בתוך ריבוע ABCD הנמצאת במרחקים שווים מהצלע AB ומהקודקודים C ו-D.
(EO = CO = DO).

הבע את EO באמצעות צלע הריבוע a.

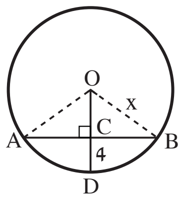


10) האלכסון הגדול במעוין הוא 20 ס״מ וגובה המעוין הוא 12 ס״מ.
א. חשב את צלע המעוין. (**הדרכה:** שרטט את הגובה מחוץ למעוין).
ב. חשב את האלכסון השני.

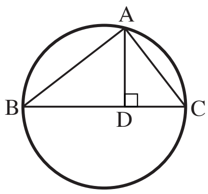
משפט פיתגורס במעגל — מיתרים וזויות

11) AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O. הרדיוס OD מאונך למיתר AB וחותך אותו בנקודה C. נתון: AB = 16 ס״מ, CD = 4 ס״מ.

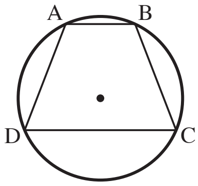
חשב את רדיוס המעגל המסומן ב-x.



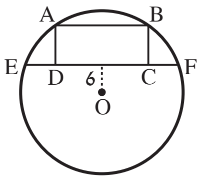
12) המשולש ABC חסום במעגל שרדיוסו 5 ס״מ כך שהצלע BC היא קוטר. AD הוא הגובה לצלע BC. נתון: AC = 6 ס״מ.
א. חשב את שטח המשולש ABC.
ב. חשב את הגובה AD.



13) ABCD הוא טרפז (שווה שוקיים) החסום במעגל שרדיוסו 13 ס״מ כך שהבסיסים נמצאים בצדדים שונים של מרכז המעגל.
נתון: AB = 10 ס״מ, CD = 24 ס״מ.
א. חשב את: (1) גובה הטרפז. (2) שטח הטרפז.
ב. ענה על סעיף א׳ כאשר הבסיסים נמצאים מאותו צד של מרכז המעגל.



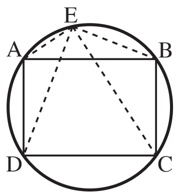
14) ABCD הוא מלבן שקודקודיו A ו-B נמצאים על המעגל וקודקודיו C ו-D נמצאים על מיתר EF. (ראה ציור). מרחק המיתר EF ממרכז המעגל O הוא 6 ס״מ. רדיוס המעגל הוא 29 ס״מ ואורך AB הוא 40 ס״מ.



חשב את שטח המלבן.

15) א. ABCD הוא מלבן החסום במעגל. E היא נקודה כלשהי על המעגל. הוכח: $AE^2 + CE^2 = BE^2 + DE^2$.

ב. הוכח: **סכום ריבועי המרחקים של קודקודי מלבן החסום במעגל מנקודה על המעגל שווה לפעמיים הקוטר בריבוע.**

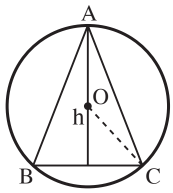


16) משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל שרדיוסו R $(\measuredangle A < 90^o)$. הגובה לבסיס הוא h.

א. הבע באמצעות R ו-h את צלעות המשולש ABC.

(הדרכה: חבר את המרכז O עם C).

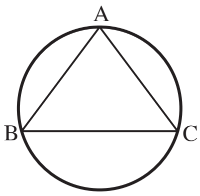
ב. מצא את הצלעות אם $R =$ 6.25 ס״מ ו-8 ס״מ $= h$.



17) משולש שווה שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום במעגל. נתון: 40 ס״מ $= AB$, 48 ס״מ $= BC$.

חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש.

(הדרכה: העבר קוטר דרך A).

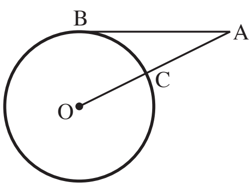


משפט פיתגורס במעגל — משיק

18) AB משיק למעגל שמרכזו O בנקודה B. הקטע AO חותך את המעגל בנקודה C.

נתון: 12 ס״מ $= AB$, 8 ס״מ $= AC$.

חשב את רדיוס המעגל.

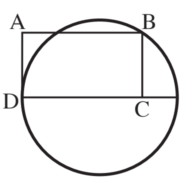


19) ABCD הוא מלבן. הצלע DC נמצאת על קוטר של המעגל והצלע AD משיקה למעגל בנקודה D.

נתון: 18 ס״מ $= DC$, 12 ס״מ $= BC$.

א. חשב את רדיוס המעגל.

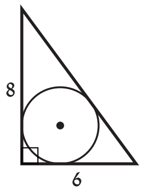
ב. חשב את אורך הקטע המחבר את A עם מרכז המעגל.



20) בתוך משולש ישר זווית שהניצבים שלו הם 6 ס״מ ו-8 ס״מ חסום מעגל.

מצא את רדיוס המעגל החסום.

(**רמז:** שני משיקים היוצאים מנקודה שמחוץ למעגל שווים זה לזה).

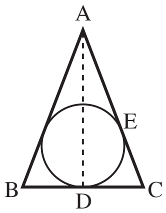


21) בתוך משולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$ חסום מעגל. D ו-E הן שתיים מנקודות ההשקה.

נסמן: $AE = a$, $AD = h$. הבע באמצעות a ו-h את:

א. רדיוס המעגל החסום. (**הדרכה:** סמן ב-O את מרכז המעגל, חבר את E עם O והתבונן במשולש AOE).

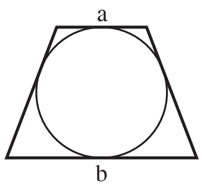
ב. בסיס המשולש ABC.



22) טרפז שווה שוקיים שבסיסיו a ו-b חוסם מעגל שרדיוסו R.

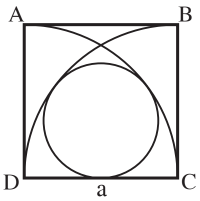
הוכח: $ab = 4R^2$.

(**הדרכה:** הורד גבהים מקצות הבסיס הקטן).



23) $ABCD$ הוא ריבוע שצלעו a. הנקודות C ו-D הן בהתאמה המרכזים של רבעי מעגל שהרדיוס שלהם הוא a. המעגל שבציור משיק לשני רבעי המעגל ולצלע DC של הריבוע.

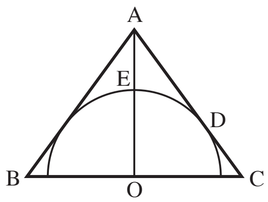
הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.



24) בתוך משולש ABC שהוא שווה שוקיים $(AB = AC)$ חסום חצי מעגל שמרכזו O כמתואר בציור. D היא אחת מנקודות ההשקה. הקטע AO חותך את קשת חצי המעגל בנקודה E. נתון: $AE = 8$ ס״מ, $AD = 16$ ס״מ.

א. חשב את רדיוס חצי המעגל.

ב. מצא את צלעות המשולש.



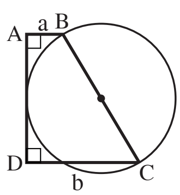
25) $ABCD$ הוא טרפז ישר זווית שהשוק הקצרה שלו משיקה למעגל והשוק הארוכה שלו היא קוטר במעגל.

נסמן: $AB = a$, $DC = b$, $(b > a)$.

א. הבע באמצעות a ו-b את היקף הטרפז.

(**הדרכה:** הבע תחילה באמצעות a ו-b את רדיוס המעגל).

ב. הבע באמצעות a ו-b את שטח הטרפז.

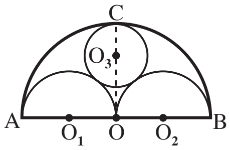


26) בתוך חצי מעגל שרדיוסו R, מרכזו O וקוטרו AB חסומים שני חצאי מעגל שרדיוסיהם שווים ומרכזיהם הם O_1 ו-O_2. שני חצאי המעגל נוגעים בחצי המעגל הגדול בנקודות A ו-B ונוגעים זה בזה בנקודה O. מעגל שלישי שמרכזו O_3 נוגע בשני חצאי המעגלים הקטנים ונוגע בחצי המעגל הגדול בנקודה C.

א. הוכח: הקטע CO העובר דרך O_3 מאונך לקוטר AB.

ב. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל שמרכזו O_3.

(**הדרכה:** היעזר במשולש O_1OO_3).



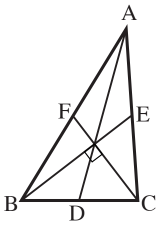
בעיות שונות — משפט פיתגורס

27) AD, BE ו-CF הם התיכונים במשולש ABC. נתון:

$BE \perp CF$, $BE = 12$ ס״מ,

$CF = 9$ ס״מ.

חשב את הצלע BC ואת התיכון AD.

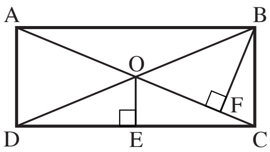


28) $ABCD$ הוא מלבן שאלכסוניו נחתכים בנקודה O. נתון: $OE \perp DC$, $BF \perp OC$,

$OE = 2$ ס״מ, $BF = \sqrt{15}$ ס״מ.

חשב את שטח המלבן.

(**הדרכה:** מצא תחילה את הקטע CF).



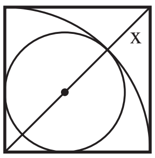
29) BD הוא הגובה לשוק AC במשולש שווה שוקיים ABC שבו $AB = AC$. (הגובה עובר בתוך המשולש). נתון: $AB = 2BC$.

הוכח: $AD = 7CD$. (**הדרכה:** הבע את BD בשתי דרכים).

30) בתוך ריבוע חסום רבע מעגל שבתוכו חסום מעגל כמתואר בציור.

הוכח שהקטע המסומן ב-x שווה לרדיוס המעגל.

(**הדרכה:** סמן את רדיוס המעגל ב-r והראה ש-$x = r$).



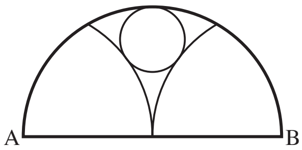
31) במשולש ישר זוית הניצבים הם a ו-b והגובה ליתר הוא h.

הוכח: $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$.

(**הדרכה:** חשב את שטח המשולש בשתי דרכים).

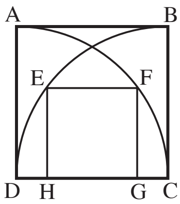
32) AB הוא הקוטר של חצי מעגל שרדיוסו R. הנקודות A ו-B הן בהתאמה מרכזי שני מעגלים שרדיוסיהם הם R. (בשרטוט מצויירים רק חלקים משני המעגלים).

הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החסום בין חצי המעגל ושני המעגלים הנ״ל. (**הדרכה:** היעזר במשולש שקודקודיו הם A, מרכז המעגל ואמצע הקטע AB).



33) ABCD הוא ריבוע שצלעו a. הנקודות C ו-D הן בהתאמה המרכזים של שני רבעי מעגל שהרדיוס שלהם הוא a. המרובע EFGH הוא ריבוע. (ראה ציור).

הבע באמצעות a את צלע הריבוע EFGH.
(**הדרכה:** היעזר במשולש DFG).

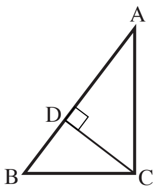


המשפט ההפוך למשפט פיתגורס

34) במקבילית שתי צלעות סמוכות הן 5 ס״מ ו-12 ס״מ. אחד מהאלכסונים הוא 13 ס״מ.
הוכח שהמקבילית היא מלבן.

35) אלכסוניה של מקבילית הם 16 ס״מ ו-30 ס״מ ואחת מהצלעות היא 17 ס״מ.
הוכח שהמקבילית היא מעוין.

36) DC הוא הגובה לצלע AB במשולש ABC.
נתון: AB = 12.5 ס״מ, AD = 8 ס״מ, CD = 6 ס״מ.
הוכח שהמשולש ABC הוא ישר זוית.



הוכחת משפטים — משפט פיתגורס

37) הוכח את משפט פיתגורס:
בכל משולש ישר זוית סכום שטחי הריבועים הבנויים על הניצבים שווה לשטח הריבוע הבנוי על היתר.
(ראה בספר **הנדסה חלק ב'** בעמ' 368 וכן תרגיל 7 בעמ' 399).

38) הוכח: **בריבוע** שצלעו a אורך **האלכסון** הוא $\sqrt{2}\,a$.

39) הוכח: במשולש **שווה צלעות** שצלעו a **הגובה** הוא $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **והשטח** הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

תשובות (משפט פיתגורס):

1) א. 25. **ב.** 11. **ג.** 10. **ד.** 12. **2)** 6 ס״מ. **3)** א. 8 ס״מ. ב. 84 סמ״ר.
4) א. 15 ס״מ, 15 ס״מ, 18 ס״מ. ב. 108 סמ״ר. ג. 14.4 ס״מ. **5)** 5.25 ס״מ.
6) א. 16 ס״מ. ב. 10 ס״מ. ג. 9.6 ס״מ. **7)** א. 78 ס״מ. ב. 288 סמ״ר.
ג. 26.83 ס״מ. **8)** 300 סמ״ר. **9)** $\frac{5}{8}a$. **10)** א. 12.5 ס״מ. ב. 15 ס״מ. **11)** 10 ס״מ.
12) א. 24 סמ״ר. ב. 4.8 ס״מ. **13) א.** (1) 17 ס״מ. (2) 289 סמ״ר. **ב.** (1) 7 ס״מ.
(2) 119 סמ״ר. **14)** 600 סמ״ר. **16)** א. $AB = AC = \sqrt{2hR}$, $BC = 2\sqrt{2hR-h^2}$.
17) 25 ס״מ. **18)** 5 ס״מ. **19)** א. 13 ס״מ. ב. 17.69 ס״מ. **20)** 2 ס״מ.
21) א. $\frac{h^2-a^2}{2h}$. ב. $\frac{h^2-a^2}{a}$. **23)** $\frac{3}{8}a$. **24)** א. 12 ס״מ. **25)** א. $2\sqrt{ab}+2(a+b)$.
ב. $\sqrt{ab}\,(a+b)$. **26)** ב. $\frac{R}{3}$. **27)** 10 ס״מ, 15 ס״מ. **28)** 61.97 סמ״ר. **32)** $\frac{R}{4}$.
33) $\frac{3}{5}a$.

היקף המעגל ושטחו

סעיף זה כולל תרגילים על **היקף המעגל ושטחו**. הסברים, דוגמאות ותרגילים נוספים מופיעים בספר **הנדסה חלק ב׳** בעמ׳ 412–402.

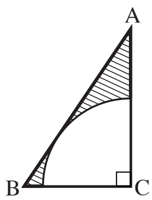
היקף המעגל ושטחו
סיכום המושגים העיקריים

ההיקף P של **מעגל** שרדיוסו R הוא:	$\boxed{P = 2\pi R}$
האורך K של **קשת** המתאימה לזווית מרכזית α במעגל שרדיוסו R הוא:	$\boxed{K = \frac{\pi R \cdot \alpha}{180}}$
השטח S של **מעגל** שרדיוסו R הוא:	$\boxed{S = \pi R^2}$
השטח G של **גזרה** המתאימה לזווית מרכזית α במעגל שרדיוסו R הוא:	$\boxed{G = \frac{\pi R^2 \cdot \alpha}{360}}$
השטח S של **טבעת** המוגבלת בין שני מעגלים שהרדיוסים שלהם הם r ו-R $(r < R)$ הוא:	$\boxed{S = \pi R^2 - \pi r^2}$

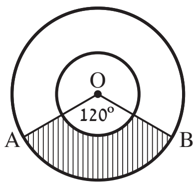
תרגילים
(היקף המעגל ושטחו)

1) בתוך מעגל חסום מלבן ששתי צלעות סמוכות שלו הן a ו-b.
הוכיח: סכום שטחי ארבעת המקטעים שבין המעגל למלבן הוא: $\frac{\pi}{4}(a^2+b^2)-ab$.

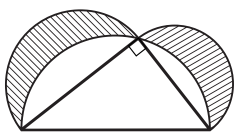
2) במשולש ישר זווית ABC
חסום רבע מעגל. נתון:
10 ס"מ = AB, 8 ס"מ = AC.
א. מצא את רדיוס רבע המעגל.
ב. חשב את השטח המקווקו.



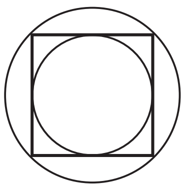
3) שני המעגלים שבציור הם בעלי מרכז משותף O.
רדיוס המעגל החיצוני גדול פי 2 מרדיוס המעגל
הפנימי שהוא R. נתון: $\measuredangle AOB = 120^\circ$.
א. הבע באמצעות R את ההיקף של הצורה המקווקוות.
ב. הוכח: שטח הצורה המקווקוות שווה לשטח
המעגל הפנימי.



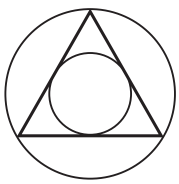
4) על צלעותיו של משולש ישר זווית בנו חצאי
מעגלים כמתואר בציור.
הוכח: השטח המקווקו שווה לשטח המשולש.
(**הדרכה:** היעזר במשפט פיתגורס).



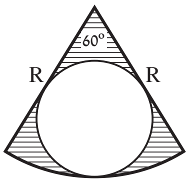
5) בציור נתונים ריבוע, מעגל החוסם
את הריבוע ומעגל החסום בריבוע.
א. חשב את היחס בין שטח המעגל
החוסם לשטח המעגל החסום.
ב. הוכח: שטח הטבעת שבין שני
המעגלים שווה לשטח המעגל הפנימי.



6) בציור נתונים משולש שווה צלעות,
מעגל החוסם את המשולש ומעגל
החסום במשולש.
חשב את היחס בין שטח המעגל
החוסם לשטח המעגל החסום.



7) בתוך גזרה שהיא חלק ממעגל שרדיוסו R חסום מעגל הנוגע ברדיוסים ובקשת הגזרה. הזוית המרכזית של הגזרה היא 60^o.



א. הבע באמצעות R את רדיוס המעגל החסום בגזרה.

ב. הבע באמצעות R את ההיקף (כולל הפנימי) והשטח של הצורה המקווקוות.

8) שטח טבעת הוא 84π סמ"ר. היחס בין סכום הרדיוסים של המעגלים היוצרים את הטבעת לבין הפרש הרדיוסים הוא $\frac{7}{3}$.

מצא את רדיוסי שני המעגלים שיוצרים את הטבעת.

תשובות (היקף המעגל ושטחו):

2) א. 4.8 ס"מ. ב. $24-5.76\pi$ סמ"ר. **3)** א. $2R+2\pi R$. **5)** א. $2:1$. **6)** $4:1$.

7) א. $\frac{R}{3}$. ב. $2R+\pi R$, $\frac{\pi}{18}R^2$. **8)** 10 ס"מ, 4 ס"מ.

