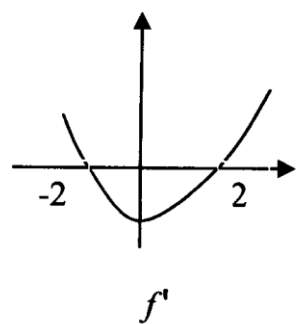
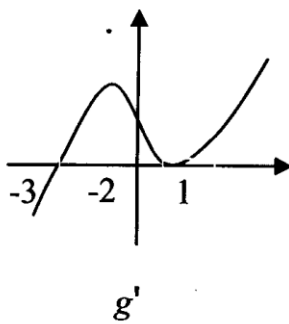
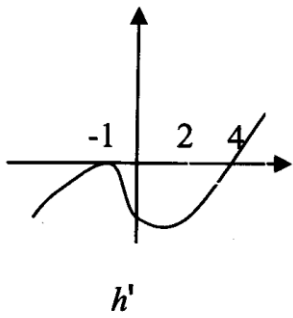


חקירת פונקציה

1. לפניך הגרפים של הנגזרות של f , g ו- h .



עבור כל אחת משלוש הפונקציות ענה על השאלות הבאות:

- היכן עולה הפונקציה והיכן היא יורדת?
- האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן – מאיזה סוג והיכן?
- מהם התחומים בהם הפונקציה קעורה כלפי מעלה ומהם התחומים בהם היא קעורה כלפי מטה?
- שרטט סקיצה של הגרפים של f , g ו- h .

2. $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים בתחום $0 \leq x \leq 5$. נתון כי:

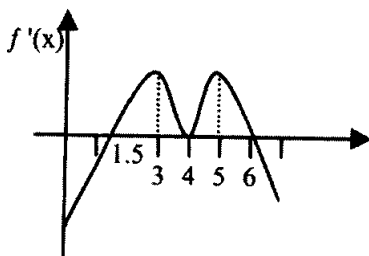
$$f(0) = 7, f(5) = 0$$

$$f'(1) = f'(3) = 0$$

עבור $f'(x)$: תחום עלייה: $2 < x < 3$, תחום ירידה: $0 < x < 2$ או $3 < x < 5$.

שרטט סקיצה של: א. $f(x)$. ב. $f'(x)$. ג. $f''(x)$.

3. $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים בתחום $0 \leq x \leq 7$.



נתון הגרף של $f'(x)$:

- מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- מהן נקודות הקיצון של $f(x)$?
- בהנחה כי: $f(0) = 3$, $f(7) = 2$, שרטט את גרף הפונקציה $f(x)$.
- שרטט בצורה כללית את הגרף של $f''(x)$.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{(x - B)^2}{x^2 - 4}$, $B > 2$.

- בסעיפים הבאים, הבע את תשובותיך בעזרת B לפי הצורך:
- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה. ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים. ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים. ד. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן. ה. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה. ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה: $y = \frac{x-3}{x^2 - a^2}$

- א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה (הבע במידת הצורך באמצעות a).
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה: $y = 1 - \frac{x - a}{x^2 - bx + 5}$

- לפונקציה זו יש אסימפטוטה אחת בלבד המקבילה לציר ה- y והיא: $x = 1$.
- א. מצא את a ו- b .
ב. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא, עבור אילו ערכים של k , אין לגרף הפונקציה ולישר $y=k$, אף נקודה משותפת.

7. נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^3}{x^2 - a}$. ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ חותך

את ציר ה- x בנקודה $x = \frac{8}{11}$. מצא:

- א. את a . ב. את תחום ההגדרה של הפונקציה. ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ד. נקודות הקיצון של הפונקציה. ה. נקודות פיתול. ו. תחומי עלייה וירידה. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה: $y = \frac{x^3 + bx - 4b}{x - 4}$. שיעור ה- y של נקודת הפיתול של הפונקציה הוא 2.

מצא:

א. את b .

ב. את תחום ההגדרה של הפונקציה. ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ד. נקודות קיצון של הפונקציה. ה. נקודת הפיתול של הפונקציה. ו. תחומי עליה וירידה. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה: $f(x) = a + \frac{\sqrt{x+b}}{cx^2}$. הישר $y = 2$ הוא אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

הישר $4y + 15x = 31$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$.

א. מצא את a, b ו- c .

ב. חקור את הפונקציה ומצא:

1. את תחום ההגדרה של הפונקציה. 2. אסימפטוטות מקבילות לצירים. 3. את נקודות הקיצון של הפונקציה. 4. תחומי עליה וירידה.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה: $y = \frac{ax}{x - \sqrt{x}}$, $a > 0$.

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ב. מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים. ג. מצא נקודות חיתוך עם הצירים. ד. מצא נקודות פיתול של הפונקציה. ה. מצא תחומי קעירות כלפי מעלה ותחומי קעירות כלפי מטה.

ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה. ז. עבור אלו ערכים של k , אין לגרף הפונקציה ולישר

$y = k$, אף נקודה משותפת?

11. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{x^2-9}}$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $x = 9$.

א. מצא את a .

ב. חקור את הפונקציה ומצא: 1. את תחום ההגדרה של הפונקציה. 2. נקודות חיתוך עם הצירים. 3. את נקודות הקיצון של הפונקציה. 4. מצא תחומי עליה וירידה.

5. מצא אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = 3 + \frac{\sqrt{x+a}}{x^2}$ (a פרמטר, $a > 0$).

- ענו על הסעיפים הבאים. במידת הצורך הביעו את התשובות באמצעות a.
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - מצאו את האסימפטוטות המקבילות לצירים.
 - מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה. (הקפידו לסמן שנתות ומספרים על הצירים, הוסיפו את האסימפטוטות, סמנו נקודות קיצון).

13.

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2x-b}{\sqrt{ax^2-bx}}$ ($a > 0$, $b > 0$).

- המרחק בין האסימפטוטות האופקיות של הפונקציה הוא 4.
 - המרחק בין האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה הוא 1.
- מצא את a ו-b.
 - מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מהן האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה?
 - הראה כי הפונקציה יורדת לכל x בתחום ההגדרה.
 - שרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

14.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a-x}{\sqrt{6x-x^2}}$ (ראה ציור).

- ידוע כי לא קיימת אף נקודה על גרף הפונקציה שבה המשיק לגרף מקביל לציר ה-x.
- הוכח כי $0 \leq a \leq 6$.
 - הצב $a = 3$ ומצא:
 - את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - את נקודת הפיתול של הפונקציה.
 - את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת הפיתול שלה.

ג. שרטטו גרף הפונקציה

תשובה: ב. 1. $0 < x < 6$. 2. $(3,0)$. 3. $y = -1/3 x + 1$

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{nx}{\sqrt{x^2+m}}$, m ו- n הם פרמטרים טבעיים.

- הראה כי שני המשיקים לגרף הפונקציה בנקודות שבהן $x = 4$ ו- $x = -4$ מקבילים אחד לשני.
- נתון כי $m = 4 + n$, ונתון כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בראשית הצירים הוא $\frac{5}{3}$.

מצא את m ו-n.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת וגזירה פעמיים לכל x . נתונה $f''(x)$, הנגזרת השנייה של הפונקציה

$$f''(x) = \frac{2x^3 - 12x}{(x^2 + 2)^3} : f(x)$$

- א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא באילו תחומים הפונקציה קעורה כלפי מעלה ובאילו תחומים היא קעורה כלפי מטה.

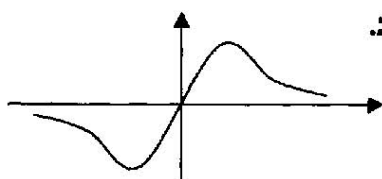
ג. ידוע שהנגזרת הראשונה של הפונקציה מתאפסת רק בנקודות $(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{4})$

- ו- $(-\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{4})$. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x רק בנקודה $(0, 0)$. שרטט, על סמך סעיפים א'-ג', סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה:

א. $\sqrt{6}, 0, -\sqrt{6}$. ב. קעורה כלפי מעלה: $-\sqrt{6} < x < 0$ או $x > \sqrt{6}$;

קעורה כלפי מטה: $0 < x < \sqrt{6}$ או $x < -\sqrt{6}$. ג.



נתונה הפונקציה: $a > 4, y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2 + 4x + a}}$

- א. הוכח כי הפונקציה מוגדרת לכל x .
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- x .
 ד. הוכח כי הפונקציה עולה בתחום הגדרתה.
 ה. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה \cup וכלפי מטה \cap של הפונקציה.
 ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: ב. $(-2, 0), (0, \frac{2}{\sqrt{a}})$. ג. $y = 1, y = -1$. ה. מעלה $x < -2$ מטה $x > -2$.