אינדוקציה 14.12.2010

1. א. הוכח באמצעות אינדוקציה מתמטית, כי לכל n טבעי מתקיים:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{4n}{2^{4n}}=2-\frac{2n+1}{2^{4n-1}}$$

ב. חשב את הסכום:

$$\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}}+\ldots+\frac{28}{2^{28}}$$

2. א. הוכח באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(2n+1)^2-(2n+2)^2+(2n+3)^2-(2n+4)^2\ldots\ldots+(4n-1)^2-(4n)^2=-n(6n+1)$$

ב. בטא באמצעות n את מספר אברי הסדרה :

$$(2n+1)^2-(2n+2)^2+(2n+3)^2-(2n+4)^2\ldots\ldots+(4n-1)^2-(4n)^2$$

ג. מצא כמה איברים לכל היותר יש בסדרה זו אם נתון שההפרש בין סכום הסדרה לבין האיבר האחרון שלה אינו גדול מ- 156.

3. נתון , כי השוויון שלפניך $-2^2+3^2-4^2+\ldots-(2n)^2=an^2-n+b$ נכון עבור $n=1$, ועבור $n=2$.

א. הוכח, כי $a=-2$ ו- $b=-1$.

ב. עבור a ו- b הנ"ל, הוכח באינדוקציה , או בדרך אחרת כי השוויון הנתון נכון לכל n טבעי.

ג. נתון כי: $1^2-2^2+3^2-\ldots+c^2=378$. מצא את c.

4. א. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\left(1-\frac{3}{3n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{3n+4}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{3n+7}\right)\cdot\ldots\ldots\cdot\left(1-\frac{3}{6n+1}\right)=\frac{3n-2}{6n+1}$$

ב. מצא את הגורם הראשון של מכפלה זו אם נתון שערכה הוא : $\frac{118}{241}$.

5. א. a_n מסמן את האיבר במקום ה – n בסדרה החשבונית ...... ,3, 6, 9.

הוכח באינדוקציה , כי 3^{a_n} משאיר שארית 1 בחילוק ב- 26 , לכל n טבעי.

ב. האם הביטוי 27^n+77 מתחלק ב- 26 ללא שארית לכל n טבעי ? נמק !

6. נתונה נוסחת האיבר הכללי של סדרה: $a_n=(-1)^{n+1}(5n-2)$.

א. הוכח, כי עבור כל n טבעי אי – זוגי , סכום n האיברים הראשונים של סדרה זו הוא

$$\frac{5n+1}{2}\ .$$

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את הסכום : $298-\ldots+78-73+68-$.

7. א. מצא נוסחה לאיבר הכללי של הסדרה : $\left(1-\frac{4}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{13}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{17}\right)\cdot.....$ והוכח באינדוקציה, כי מכפלת n האיברים הראשונים של סדרה זו היא : $\frac{5}{4n+5}$.

ב. היעזר בסעיף א' ומצא נוסחה למכפלה:

$$\left(1-\frac{4}{4n+9}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{4n+13}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{4n+17}\right)\cdot.....\cdot\left(1-\frac{4}{8n+5}\right)$$

ג. הוכח באינדוקציה את הנוסחה שמצאת בסעיף ב'.

8. א. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$(1\cdot 2+2)+(2\cdot 1+2)+(3\cdot 0+2)+.....+\left[n(3-n)+2\right]=\frac{n(n+2)(5-n)}{3}$$

ב. חשב את סכום n האיברים הראשונים בסדרה זו אם נתון: $S_n-S_{n-1}=-338$

9. א. הוכח באינדוקציה, כי עבור כל n טבעי מתקיים: $1+9+9^2+9^3+...+9^{2n}=\frac{9^{2n+1}-1}{8}$

ב. הוכח, על סמך סעיף א', כי הביטוי : $1+3^2+3^4+3^6+...+3^{4n}$ מתחלק ב- 8 לכל n טבעי .

10. א. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית, או בכל דרך אחרת, כי עבור כל n טבעי מתקיים:

$$\frac{18}{(2n+1)(2n+3)}+\frac{18}{(2n+3)(2n+5)}+\frac{18}{(2n+5)(2n+7)}+...+\frac{18}{(4n-1)(4n+1)}=\frac{18n}{(4n+1)(2n+1)}$$

ב. חשב את n אם ידוע שסכום הסדרה גדול פי $18\frac{4}{7}$ מן האיבר האחרון שלה.

11. א. הוכח, כי אם עבור n טבעי $10\cdot 5^n-3\cdot 2^n$ מתחלק ב- 42 אז גם הביטוי $10\cdot 5^{n+2}-3\cdot 2^{n+2}$ מתחלק ב- 42.

ב. האם ניתן להסיק, על פי סעיף א', שהביטוי $10\cdot 5^n-3\cdot 2^n$ מתחלק ב- 42 עבור כל n טבעי זוגי? נמק.

ג. הוכח באינדוקציה מתמטית, או בדרך אחרת, כי הביטוי $10\cdot 5^n-3\cdot 2^n$ מתחלק ב- 7 עבור כל n טבעי זוגי.

12. א. הוכח, כי עבור כל n טבעי אי – זוגי מתקיים :

$$-9+13-17+21-25+....+(-1)^n(4n+13)=-2n-11$$

ב. חשב, בהסתמך על סעיף א', את הסכום : $-17+21-25+....+93$