

דף עבודה "אינדוקציה".

1. הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \quad \text{א'}$$

$$1 \cdot (-4)^{n-1} + 6 \cdot (-4)^{n-2} + 11 \cdot (-4)^{n-3} + \dots + (5n-4) \cdot (-4)^0 = n \quad \text{ב'}$$

$$n + (n+2) + (n+4) + (n+6) + \dots + (5n) = 3n(2n+1) \quad \text{ג'}$$

$$\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+3} + \dots + \frac{2}{3n} > 1 - \left( \frac{2}{3n+1} + \frac{2}{3n+2} + \dots + \frac{2}{4n} \right) \quad \text{ד'}$$

2. א' הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$\frac{2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{25}{12^2 \cdot 13^2} + \frac{27}{13^2 \cdot 14^2} + \dots + \frac{57}{28^2 \cdot 29^2} \quad \text{ב' חשב את הסכום:}$$

תשובה: 0.005755.

3. א' הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

ב' נתון:  $a > b > 1$  הם מספרים טבעיים. הוכיחו באמצעות סעיף א' כי:

$$b(b+1) + (b+1)(b+2) + \dots + a(a+1) = \frac{a^3 + 3a^2 + 2a - b^3 + b}{3}$$

4. א' הוכח באינדוקציה או בדרך אחרת כי לכל  $n$  טבעי מתקיים:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ב' מצא בעזרת סעיף א' את הסכום:  $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + (2n)^2$

ג' מצא בעזרת סעיפים א' וב' את הסכום:  $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

5. א' הוכח כי עבור כל  $k$  טבעי:  $\frac{1}{(2k+1)^2} < \frac{1}{4k} - \frac{1}{4(k+1)}$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4} \quad \text{ב' הוכח בהסתמך על סעיף א'}$$

6. א' הוכח באינדוקציה כי עבור כל  $n$  טבעי

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}$$

ב' הוכח בהסתמך על סעיף א' כי  $\frac{1}{5^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{11^2} + \dots + \frac{1}{(3n+2)^2} < \frac{1}{6}$

7. א' הוכח באינדוקציה כי עבור כל  $n$  טבעי  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{n}{2n+4}$

ב' חשב בהסתמך על סעיף א' את הסכום:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$

**בהצלחה!**