24.01.2011

עבודה להגשה לכיתה י"ב 5 יח"ל

בעיות קיצון ,שטחים ונפחים.

.1

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2a}{x}$ ($0 < a < 1$).

א. הבע באמצעות a את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$, ציר ה- x , הישר $x = 1$ והישר $x = a$.

ב. חשב את הערך של a עבורו השטח שמצאת בסעיף א' יהיה מכסימלי.

א. $2a\ln a$ **ב.** $\frac{1}{e}$

.2

נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x+a} - e^{-x-a}$ ($a > 0$).

א. הראה שהפונקציה עולה לכל ערך של x .

ב. בטא בעזרת a את שיעורי הנקודה שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא מינימלי.

ג. הראה שהנקודה שמצאת בסעיף ב' היא נקודת הפיתול של הפונקציה, ומצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה..

ד. מהו הערך המינימלי של שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$?

א. $f'(x) > 0$ **לכל** x **ב.** $(-a;0)$ **ג.** $f''(-a) = 0$, **עבור** $x > -a$ **הפונקציה קעורה כלפי מעלה** $\cup$ **, עבור** $x < -a$ **הפונקציה קעורה כלפי מטה** $\cap$ **ד.** 2

.3

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{ax}$ ($a \neq 0$).

א. בטא בעזרת a את שיעורי הנקודה A שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא ae^a .

ב. בטא בעזרת a את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שמצאת בסעיף א'.

ג. הנקודה B היא נקודת החיתוך של המשיק הנ"ל עם ציר ה- x . מצא את שיעוריה.

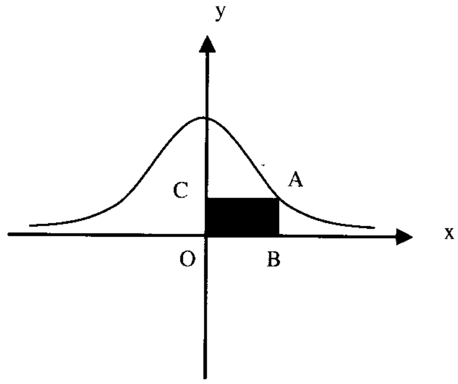
ד. האנך היורד מן הנקודה A לציר ה- x חותך אותו בנקודה C.
בטא בעזרת a את שטח המשולש ABC .

ה. מצא את a עבורו שטח המשולש ABC הוא מינימלי.

א. $A(1;e^a)$ **ב.** $y = ae^a x - ae^a + e^a$ **ג.** $B(\frac{a-1}{a};0)$

ד. $S_{ABC} = \frac{e^a}{2a}$ **ה.** $a = 1$

.4



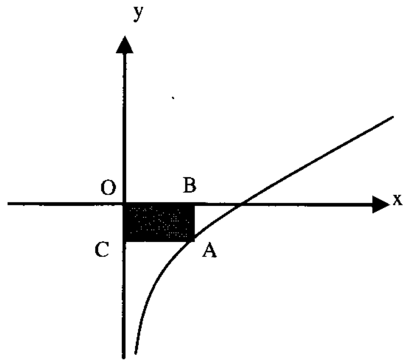
נתונה הפונקציה : $f(x) = e^{1-x^2}$. מנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון, מורידים אנכים לצירים. אנכים אלה יוצרים עם הצירים מלבן ABOC (ראה שרטוט).
מצא את שיעורי הנקודה A עבורה שטח המלבן הנוצר באופן זה יהיה מכסימלי.

$$A(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{e})$$

.5

א. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\frac{8x+1}{4x^2+x}}$ בתחום $x>0$. השטח המוגבל בין גרף הפונקציה , ציר ה- x , הישר $x=1$ והישר $x=a$ מסתובב סביב ציר ה- x . נפח גוף הסיבוב הנוצר הוא $\pi\cdot\ln3.6$. מצא את a ($a>1$).

ב. נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln x - 3$.



1) מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

2) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הרביעי. מנקודה A מורידים אנכים לצירים. האנכים יוצרים עם הצירים מלבן ABOC (ראה שרטוט). מצא את שיעורי הנקודה A עבורה שטח המלבן הנוצר באופן זה יהיה מקסימאלי.

3) חשב את שטח המלבן המקסימאלי.

<u>הערה:</u> אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. $a=2$ **ב.** 1) $(e^3;0)$ 2) $A(e^2;-1)$ 3) e^2

.5

נתונה הפונקציה: $f(x) = -ax + b\ln(x-1) + 4$. גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x

בנקודות $(2;0)$ ו- $(e^2+1;0)$.

א. מצא את a ו- b .

ב. מצא את תחום ההגדרה ואת נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$.

ג. סרטט סקיצה של הפונקציה $f(x)$.

ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

1) מצא את שיעור ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגן.

2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.

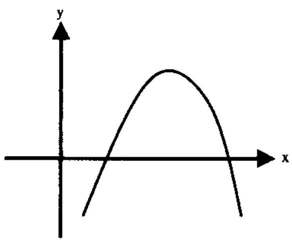
3) נתון: $g(2) = 0.61$, $g(e^2+1) = e^2+5$.

סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

4) חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $f(x)$ וציר ה- x.

א. $a = 2$, $b = e^2 - 1$

ב. **תחום ההגדרה:** $x > 1$, $(\frac{e^2+1}{2};3.03)$ **מקסימום** **ג.**

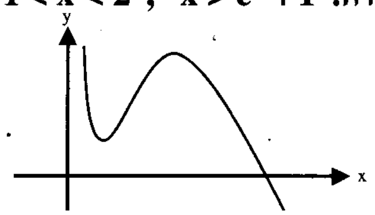


ד. 1) $x = 2$ **נקודת מינימום ,** $x = e^2+1$ **נקודת מקסימום**

2) תחום עלייה: $2 < x < e^2+1$,

תחומי ירידה: $1 < x < 2$, $x > e^2+1$

(3



11.78 (4

.6

א. לפונקציה : $y = \frac{a}{\ln x} + b\ln x$ יש נקודת קיצון ב- $x = e^2$ (b פרמטר חיובי).

1) הוכח: $a = 4b$.

2) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

3) הבע באמצעות b את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

4) נתון כי הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה עבור $-4 < k < 4$.

מצא את a ואת b .

ב. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt[3]{\left(x^2 + 2x + a\right)^2}}$ $(a > -1)$.

הישר $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$. מצא את הפונקציה.

<u>הערה:</u> אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. 2) $x > 0$, $x \neq 1$ (3 $(e^2;4b)$ מינימום , $(e^{-2};-4b)$ מכסימום (4 $b = 1$, $a = 4$

ב. $f(x) = 1.5\sqrt[3]{x^2 + 2x}$

.7

נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$, המוגדרת לכל $x \neq -1$: $f'(x) = \frac{2e^{\frac{x-1}{x+1}}}{(x+1)^2}$.

ערך הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 1.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

ד. מצא את תחומי הקעירות כלפי מעלה $\cup$ ואת תחומי הקעירות כלפי מטה $\cap$ של הפונקציה.

א. $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$ ב. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ג. $(0;\frac{1}{e})$

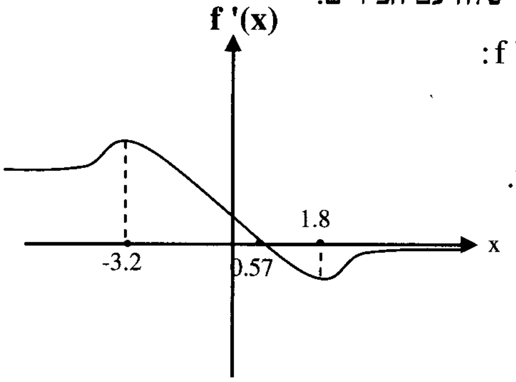
ד. תחום הקעירות כלפי מעלה $\cup$: $x < 0$, $x \neq -1$,
תחום הקעירות כלפי מטה $\cap$: $x > 0$.

.8

נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים.

ב. בסרטוט שלפניך מתואר הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$:



היעזר בנתונים הרשומים בסרטוט ומצא:

(1) את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.

(2) את נקודות הפיתול של הפונקציה $f(x)$.

(3) את תחומי הקעירות כלפי מעלה ואת תחומי הקעירות כלפי מטה של הפונקציה.

(4) סרטט סקיצה של הגרף של הפונקציה $f(x)$.

ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$, ציר ה- x וציר ה- y.

.9

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{128 + 8 \cdot 2^x - 2^{2x}}$.

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

2) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

3) מצא אסימפטוטה מקבילה לציר ה- x.

4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

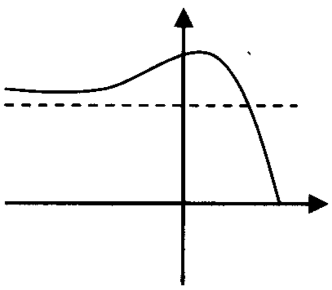
5) השטח המוגבל הין גרף הפונקציה, ציר ה- x וציר ה- y מסתובב סביב ציר ה- x. חשב את נפח גוף הסיבוב המתקבל.

ב. פתור את המשוואה: $2 \cdot e^{x-1} + \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot e^{\frac{4x-1}{2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{e^2}\right)^{\frac{1-x}{2}} - \frac{1}{e}$

<u>הערה:</u> אין קשר בין סעיף א' לסעיף ב'

א. 1) $x \le 4$ 2) $(2;12)$ מקסימום, $(4;0)$ מינימום

3) $y = \sqrt{128}$ ד.



5) 501.18π

ב. $x = 0$.

נתונה הפונקציה : $y = x^2 + 4x + 4 - 2x\ln(x+2)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

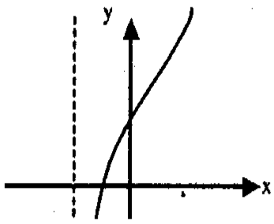
ב. מצא נקודה על גרף הפונקציה שבה שיפוע המשיק לגרף הפונקציה הוא מינימלי.

ג. מהו השיפוע המינימלי?

ד. הסבר מדוע הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ה. נתון כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = -1.22$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. $x > -2$ ב. $(0;4)$ ג. $4-2\ln2 = 2.61$ ד. $y' \geq 2.61$ לכל x בתחום ההגדרה של הפונקציה ה.



בהצלחה!!!