

פרק א': אלגברה – בעיות מילוליות, אינדוקציה ($33\frac{1}{3}$ נקודות)

ענה על אחת מבין השאלות 1-2

1. לבריכת שחייה מחוברים שני צינורות בעזרתם ממלאים ומרוקנים את הבריכה בקצב קבוע. קצב המילוי של הבריכה זהה לקצב בו מרוקן כל צינור את הבריכה. אחד הצינורות עבה יותר מן השני. יום אחד פאשר כמות המים בבריכה הייתה 80% מן הקיבולת שלה, פתחו את שני הצינורות על מנת לרוקן את הבריכה. הצינור הדק הופעל בטעות על פעולת מילוי הבריכה. הבריכה התרוקנה כעבור 8 שעות. הזמן הדרוש לצינור הדק על מנת למלא (או לרוקן) את הבריכה לבדו ארוך ב- m שעות מן הזמן הדרוש לצינור העבה לביצוע אותה פעולה.
 - א. בטא באמצעות m את הזמן הדרוש לצינור העבה על מנת למלא או לרוקן את הבריכה.
 - ב. הסבר מדוע יש פתרון אחד למשוואה שפתרת בסעיף א' עבור כל ערך של m המתאים לתוכן הבעיה.
 - ג. נתון כי הצינור העבה יכול למלא לבדו את כל הבריכה ב- 8 שעות. חשב את m .

2. הוכח בעזרת אינדוקציה מתמטית (או בדרך אחרת), כי עבור $n > 3$ (n מספר טבעי)

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} < 2 - \frac{1}{n} \quad \text{מתקיים:}$$