

דף חזרה בנושא : חקירת פונקציה רציונלית

1. חקרו את הפונקציות הנתונות לפי הסעיפים : תחום הגדרה, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון וסוג הקיצון (מקומי ומוחלט), תחומי עליה וירידה. סרטטו סקיצה של גרף הפונקציה.

$f(x) = \frac{x}{2-x} \quad \text{ג.}$	$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{ב.}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \quad \text{א.}$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 1} \quad \text{ז.}$	$f(x) = \frac{x}{(2x-5)^2} \quad \text{ט.}$	$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad \text{ד.}$
$f(x) = 1 + \frac{2x-1}{(1-x)^2} \quad \text{יג.}$	$f(x) = \left(\frac{x}{x-2}\right)^2 \quad \text{יב.}$	$f(x) = \frac{(x-3)^2}{x^2 + 2} \quad \text{יא.}$
		$f(x) = \frac{(3x-1)^2}{x^2} \quad \text{יד.}$

- תשובה : א. תחום $x \neq 0$; אסימפטוטות $x = 0, y = 0$; יורדת בכל נקודה בתחום
- ב. תחום $x \neq 0$; אסימפטוטה $x = 0$; מינימום $x = 1$, מקסימום $x = -1$; עליה $x > 1, x < -1$, ירידה $-1 < x < 0, 0 < x < 1$
- ג. תחום $x \neq 2$; אסימפטוטות $x = -1, y = -1$; חיתוך $(0,0)$; עולה בכל נקודה בתחום
- ד. תחום \mathbb{R} ; אסימפטוטה $y = 1$; חיתוך $(0,-1), (-1,0), (1,0)$; מינימום $x = 0$; עליה $x > 0$, ירידה $x < 0$
- ז. תחום $x \neq 1$; אסימפטוטות $x = 1, y = 0$; חיתוך $(0,1)$; עליה $x < 1$, ירידה $x > 1$
- י. תחום $x \neq 2$; אסימפטוטות $x=2, y=0$; חיתוך $(0,0)$; מינימום $x = -2/3$; עליה $-2/3 < x < 2$, ירידה $x < -2/3, x > 2$
- יא. תחום \mathbb{R} ; אסימפטוטה $y = 1$; חיתוך $(0,4.5), (3,0)$; מינימום $x = 3$, מקסימום $x = -2/3$; עליה $x > 3, x < -2/3$, ירידה $-2/3 < x < 3$
- יב. תחום $x \neq 2$; אסימפטוטות $x = 2, y = 1$; חיתוך $(0,0)$; מינימום $x = 0$; ירידה $x > 2, x < 0$, עליה $0 < x < 2$

2. הישר $x = -2$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{ax}{x^2 - a^2}$. מצאו את

ערך הפרמטר a , חקרו את הפונקציה וסרטטו סקיצה שלה.

תשובה : א. $a = \pm 2$

3. הישר $x = 3$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה $f(x) = \frac{(x-a)^2}{x-b}$, ובנקודה

$x = 7$ הפונקציה מקבלת ערך קיצון.

א. חשבו את a ואת b , ובדקו את סוג הקיצון.

ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות?

תשובה: א. $a = 7, b = 3$, מינימום; ב. מקסימום $x = -1$

4.

נתונה הפונקציה: $y = 1 + \frac{ax^2 - 11}{x^2 - 9}$. לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית $y = 5$.

א. מצא את a .

ב. הצב את ערך הפרמטר a בפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) נקודות קיצון וקבע את סוגן.

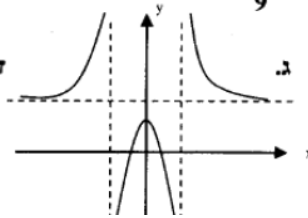
(4) אסימפטוטות נוספות לפונקציה המקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. עבור אילו ערכי k , הישר $y = k$ אינו חותך את גרף הפונקציה?

א. 4. ב. 1. $x \neq \pm 3$ 2. $(0, 2\frac{2}{9}), (2, 0), (-2, 0)$ 3. מקסימום $(0, \frac{20}{9})$

ג. $x = -3, x = 3$ 4. $2\frac{2}{9} < k \leq 5$



נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 2x + k}{x^2 - 2x - 3}$

- א. לפונקציה יש נקודות קיצון בנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y. הוכח: $k=3$.
 ב. הצב את k בפונקציה ומצא:

- (1) תחום הגדרה.
- (2) נקודות קיצון.
- (3) נקודות חיתוך עם הצירים.
- (4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- (5) תחומי עלייה וירידה.

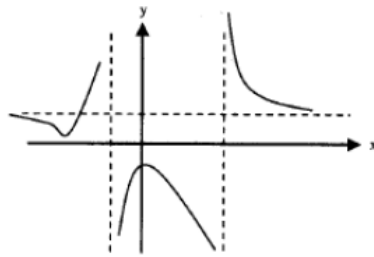
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

א. (1) $x \neq 3, x \neq -1$ מקסימום (0, -1), מינימום (-3, 0.5)

(2) $x = -1, x = 3$ (3) (0, -1)

(4) עלייה עבור: $x < -3$ או $x > 3$, ירידה עבור: $-3 < x < 0$

ג. עלייה עבור: $x \neq -1, -3 < x < 0$



6.

נתונה הפונקציה: $y = \frac{ax + b}{x^2 - 9}$

- א. אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-y. מצא את a .
 ב. הצב את a שמצאת בסעיף א' ומצא את b , אם ערך הפונקציה עבור $x=4$ הוא $\frac{9}{7}$.

ג. הצב את b בפונקציה ומצא:

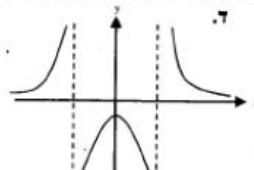
- (1) תחום הגדרה.
- (2) נקודות קיצון.
- (3) תחומי עלייה וירידה.
- (4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. עבור אילו ערכי k הישר $y=k$ אינו חותך את גרף הפונקציה?

א. $a=0$ ב. $b=9$ ג. $x \neq \pm 3$ (1) מקסימום (0, -1) עלייה עבור: $-3 < x < 0$ או $x < -3$

ירידה עבור: $0 < x < 3$ או $x > 3$ (2) $x = 3, x = -3, y = 0$ (3) $-1 < k \leq 0$



7.

נתונה הפונקציה: $y = \frac{Ax^2 - 6x + 9}{x^2 - 4}$

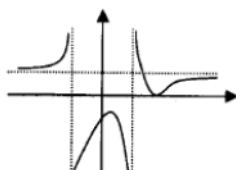
המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 1$ מקביל לישר $9y - 4x = 27$.

א. מצא את A.

ב. הצב את הערך של A בפונקציה ומצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה

וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.



א. $y = 1, x = -2, x = 2$ (5) $(0, -\frac{9}{4}), (3, 0)$

8. נתונה הפונקציה: $y = \frac{9x - 9}{x^2 - ax + 10}$ לפונקציה אסימפטוטה אנכית ב- $x = 5$.

א. הוכח כי $a = 7$

ב. חקור את הפונקציה חקירה מלאה (כולל אסימפטוטות, אם יש).

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

9. נתונה הפונקציה: $f(x) = 1 + \frac{Ax^2}{x^2 - 4}$ לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית

$y = 4$

א. מצא את ערכו של הפרמטר A, חקור את הפונקציה ומצא:

(1) תחום הגדרה.

(2) נקודות חיתוך עם הצירים.

(3) נקודות קיצון וקבע את סוגן.

(4) תחומי עלייה וירידה.

(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.

ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: א. $a = 3$ ב. $x \neq \pm 2$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $x = 2$, $x = -2$, $\text{Max}(0, 1)$

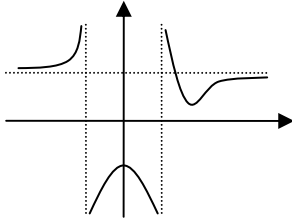
10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{Ax^2 - x + 6}{Bx^2 + x - 6}$

הישרים $x = 2$ ו- $y = 3$ הם אסימפטוטות לגרף הפונקציה.

א. מצא את A ו-B.

- ב. הצב את הערכים של A ו-B בפונקציה ומצא:
 (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובה: א. $A = 3, B = 1$. ב. $(1, -3), (2, -1)$ מקסימום, $(0, -1)$, $(12, 2.84)$ מינימום (3) עלייה: $x > 12, x < 0, x \neq -3$, ירידה: $x \neq 2, 0$.
 ג. $(0, -1)$ $(4 < x < 12)$ $(5) y = 3, x = -3, x = 2$



11. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+6}{x^2-2x+2}$

- א. נתון כי לפונקציה נקודת קיצון על ציר ה-y. מצא את a.
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה ושרטט גרף של הפונקציה.

תשובה: א. $a=6$. ב. כל x ג. עלייה $2 < x$ או $x < 0$ ירידה $0 < x < 2$

12. גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - x - m}{x^2}$ חותך את האסימפטוטה האופקית

שלו ב- $x = -2$.

א. מצא את m.

- ב. מצא את תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים ואסימפטוטות מקבילות לצירים.

ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מצא לאלו ערכי k, יש למשוואה $f(x) = k$:

1. פתרון אחד 2. שני פתרונות 3. אף פתרון.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$. מצאו את a ואת נקודות המינימום והמקסימום

של הפונקציה, כאשר נתון:

א. $x = 1$ היא נקודת אפס של הנגזרת

ב. $x = -2$ היא נקודת אפס של הנגזרת

תשובה : א. $a = 0$, מינימום $x = -1$, מקסימום $x = 1$; ב. $a = 3/4$,
מינימום $x = -2$, מקסימום $x = 1/2$: תשובה :